СОДЕРЖАНИЕ

Введение 5

1 Общая теория погрешностей 6
1.1 Вычисление погрешностей приближенного числа 6
1.2 Индивидуальное задание №1 12

2 Методы решения систем линейных алгебраических уравнений 16
2.1 Системы линейных уравнений 16
2.2 Метод Гаусса 16
2.3 Метод итераций 19
2.4 Метод Зейделя 21
2.5 Индивидуальное задание №2.1 23
2.5 Индивидуальное задание №2.2 26

3 Решение нелинейных уравнений 29
3.1 Этапы решения нелинейных уравнений 29
3.2 Методы уточнения корней 29
3.3 Индивидуальное задание №3 35

4 Приближение функций 38
4.1 Интерполирование функции 38
4.2 Среднеквадратичное приближение функции 45
4.3 Приближение сплайнами 49
4.4 Индивидуальное задание №4.1 50
4.5 Индивидуальное задание №4.2 54
4.6 Индивидуальное задание №4.3 56

5 Численное интегрирование и дифференцирование 59
5.1 Численное интегрирование 59
5.2 Численное дифференцирование 63
5.3 Индивидуальное задание №5.1 66
5.4 Индивидуальное задание №5.2 70

6 Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений 71
6.1 Задача Коши 71
6.2 Метод Эйлера, метод Эйлера с пересчетом 71
6.3 Метод Рунге-Кутта 74
6.4 Индивидуальное задание №6.1 75

7 Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений 79

7.1 Метод конечных разностей 79
7.2 Метод прогонки 82
7.3 Индивидуальное задание №7.1 86
7.3 Индивидуальное задание №7.2 89

8 Разностные методы решения задач математической физики 92
8.1 Дифференциальные уравнения с частными производными 92
8.2 Индивидуальное задание №8 96

Список рекомендуемой литературы 99

ВВЕДЕНИЕ

Потребность в развитии численных методов возникла с широким распространением электронно-вычислительных появлением такого метода научного познания как математическое моделирование и вычислительный эксперимент.

Вычислительный эксперимент – это технология, основанная на построении и анализе с помощью ЭВМ математических моделей изучаемого объекта.

Численный метод – это такая интерпретация математической модели («дискретная модель»), которая доступна для реализации на ЭВМ.

Например, если математическая модель представляет собой дифференциальное уравнение, то численным методом может быть аппроксимирующее его разностное уравнение совместно с алгоритмом, позволяющим отыскать решение этого разностного уравнения. Результатом реализации численного метода на ЭВМ является число или таблица чисел.

Целью изучения курса «Численные методы» является освоение основных идей методов, особенностей областей применения и методики использования их как готового инструмента практической работы при проектировании и разработке систем математического обеспечения, математической обработки данных прикладных задач, построении алгоритмов и организации вычислительных процессов на персональных компьютерах.

В процессе изучения дисциплины студент должен освоить приемы и навыки вычислительных процедур, научиться выбирать оптимальный метод решения данной задачи, оценивать точность полученного численного решения.

Численные методы используется при создании и применении пакетов стандартных программ в инженерно-технической деятельности, а также в других областях научной и практической работы при постановке и решении прикладных задач с помощью математических моделей и вычислительной техники.

1 ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

1.1 Вычисление погрешностей приближенного числа

Решение большинства практических задач с определенной степенью условности можно представить в виде двух последовательных этапов:

1) математическое описание рассматриваемой проблемы;

2) решение сформулированной математической задачи.

На первом этапе мы встречаемся с двумя характерными источниками погрешности. Во-первых, это то, что реально протекающие процессы не всегда можно точно описать математически, а вводимые значения дают возможность получить лишь более или менее идеализированные модели. Во-вторых, это неточность задания исходных параметров, получаемых, как правило, из эксперимента, дающего лишь приближенный результат.

В соответствии с этим суммарная погрешность математической модели и начальных данных объединяется в погрешность исходной информации.

Имея в виду независимость этой погрешности от второго этапа решения исходной задачи, ее часто называют неустранимой погрешностью.

Получение точного решения математической задачи (второй этап) независимо от того, строится ли оно аналитически или на ЭВМ, как правило, неосуществимо. Поэтому в практических расчетах используются методы получения приближенных решений и, в первую очередь - численные.

Такая замена точного решения приближенным и порождает погрешность метода, или, как ее часто называют, погрешность аппроксимации.

В процессе решения задачи мы производим округление исходных данных, промежуточных и окончательных результатов. Эти погрешности, а также погрешности, возникающие при выполнении арифметических операций над приближенными числами, в той или иной мере переносятся в результат вычислений и образуют так называемую вычислительную погрешность или погрешность округлений.

В практике вычислений часто возникает необходимость в округлении числа, то есть в замене его другим числом с меньшим количеством цифр, причем сохраняется одна или несколько цифр, считая слева направо.

Сформулируем правила округления.

1. Если отбрасываемые цифры составляют число, большее половины единицы последнего оставляемого разряда, то последняя оставляемая цифра усиливается (увеличивается на единицу).
2. Если отбрасываемые цифры составляют число, меньшее половины единицы последнего оставляемого разряда, то оставляемые цифры остаются без изменения.
3. Если же отбрасываемые цифры составляют число, равное половине единицы последнего оставляемого разряда, то последняя оставляемая цифра усиливается, если она нечетная, и остается без изменения, если она четная.

Пример 1

Числа A_1 = 273,25001; A_2 = 2,71828; A_3 = 273,15; A_4 = 273,25 округлить до десятых долей.

Решение:

Следуя правилу округления, имеем

a_1 = 273,3; a_2 = 2,7; a_3 = 273,2; a_4 = 273,2.

В повседневной практической деятельности, а также при решении той или иной математической задачи используются числа двух родов: точные и приближенные.

Приближенным числом для точного числа a_0 называется число, незначительно отличающееся от точного и заменяющее его в вычислениях.

Число $\Delta_a = |a - a_0|$ называется абсолютной погрешностью приближенного числа a, где a_0 - точное значение числа, $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|}$, *где* $a \neq 0$ называется относительной погрешностью приближенного числа a.

Пример 2

Даны длины сторон прямоугольника, измеренные с точностью 0,01. Оценить абсолютную погрешность в определении площади, $a = 5{,}43; \quad b = 3{,}82; \quad \Delta_a = \Delta_b = 0{,}01.$

Решение:

$$S = a \cdot b = 20{,}7426$$

$$S_{\max} = (a + 0{,}01)(b + 0{,}01) = 20{,}8352$$

$$S_{\min} = (a - 0{,}01)(b - 0{,}01) = 20{,}6502$$

$$|S - S_{\min}| = 0{,}0924; \quad |S - S_{\max}| = 0{,}0926;$$

$$\Delta_S = 0{,}0926 \approx 0{,}1$$

Пример 3

Даны длины сторон прямоугольника, измеренные с точностью 0,01. Оценить относительную погрешность в определении площади.

$a = 5{,}43; \quad b = 3{,}82; \quad \Delta_a = \Delta_b = 0{,}01$

Решение:

Из примера 2 следует, что

$S = a \cdot b = 20{,}7426, \qquad \Delta_S = 0{,}0926,$ следовательно:

$$\delta_S = \frac{0{,}0926}{20{,}7426} = 0{,}0045 = 0{,}45\%.$$

Любое положительное число можно представить в виде конечной или бесконечной десятичной дроби:

$$a = \alpha_n 10^n + \alpha_{n-1} 10^{n-1} + ... + \alpha^{m-n+1} + ...,$$

где α_i – цифры числа *a* в *i* –ом разряде, причем $\alpha_m \neq 0$; *m*-старший десятичный разряд числа *a* (некоторое целое число).

Значащей цифрой приближенного числа называется всякая цифра в его десятичном изображении, отличная от нуля, и нуль, если он содержится между значащими цифрами или является представителем сохраненного десятичного разряда.

Например, числа 0,002406; 5,0900 имеют соответственно 4 и 5 значащих цифр.

Если же мы хотим показать, что у числа 500000 только два значащих нуля, то это число следует записать в виде произведения двух сомножителей: $500*10^3$, или $0{,}500*10^6$.

Говорят, что *n* первых значащих цифр приближенного числа являются верными в узком (широком) смысле, если абсолютная погрешность этого числа не превышает половины (единицы) разряда, выражаемого *n*-ой значащей цифрой считая слева направо.

$\Delta = \left| A\text{-}a \right| \leq 0{,}5*10^{m-n+1}$ в узком смысле,

$\Delta = \left| A\text{-}a \right| \leq 10^{m-n+1}$ в широком смысле.

Можно установить зависимость между количеством верных значащих цифр и относительной погрешностью. Если положительное приближенное число *a* имеет *n* верных десятичных знаков в узком смысле то его погрешность удовлетворяет следующему неравенству:

$$\delta a \leq \frac{1}{\alpha_m} * (\frac{1}{10})^{n-1}. \qquad (1.1)$$

Если число *a* имеет *n* верных знаков в широком смысле, то оценку (1.1) нужно удвоить.

Пример 4

Дано приближенное число = 2,7182 и его абсолютная погрешность Δa = 0,007.

Определить, какие значащие цифры приближенного числа будут верными в широком (узком) смысле.

Решение:

В силу соотношения (1.1) имеем:

$0{,}007 \leq \omega * 10^{\,0-n+1}$.

Решение этого неравенства есть

$n \le 3$ при $\omega = 1$;

$n \le 2$ при $\omega = 0{,}5$.

Таким образом, у приближенного числа = 2,7182 по крайней мере три верных знака в широком смысле и два верных знака в узком смысле.

Погрешность арифметических действий.

Абсолютная погрешность суммы или разности равна сумме абсолютных погрешностей:

$$\Delta(a \pm b) = \Delta a + \Delta b\,. \qquad (1.2)$$

Относительная погрешность произведения или частного равна сумме относительных погрешностей:

$$\delta(ab) = \delta a + \delta b\,, \qquad (1.3)$$

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta a + \delta b\,.$$

Относительная погрешность степени равна произведению значения степени и относительной погрешности числа:

$$\delta(a^k) = k\delta a\ , \qquad (1.4)$$

$$\delta(\sqrt[k]{a}) = \frac{1}{k}\delta a\,.$$

Зная одну из погрешностей другую можно найти по формуле относительной погрешности $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|}$, *где* $a \neq 0$.

Пример 5

Вычислить и определить погрешности $y = \dfrac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)}$, где a=10,82(±0,03), b=9,37(±0,004), m=0,28(±0,006), n=15,2(±0,02).

Решение:

По формулам (1.1) - (1.4):

$$\delta y = \delta(\sqrt[3]{(a-b)}) + \delta(m(n-a)) = \frac{1}{3}\delta(a-b) + \delta m + \delta(n-a)\,.$$

Вычислим значение a-b и абсолютную погрешность этой разности по формуле (2):

a-b=(10,82-9,37)(±(0,03+0,004))=1,45(±0,034).

Найдем относительную погрешность

$$\delta(a-b)=\frac{0{,}034}{1{,}45}=0{,}0234.$$

Аналогично найдем значения *n-a*, абсолютную погрешность разности и ее абсолютную погрешность:

n-a=(15,2-10,82)(±(0,02+0,03))=4,38(±0,05);

$$\delta(n-a)=\frac{0{,}05}{4{,}38}=0{,}0114.$$

Значение m и ее абсолютная погрешность заданы: m=0,28(±0,006), $\delta m=\frac{0{,}006}{0{,}28}=0{,}0214.$

Вычислим значение *y*:

$$y=\frac{\sqrt[3]{10{,}82-9{,}37}}{0{,}28(15{,}2-10{,}82)}=0{,}923.$$

Подставим найденные значения относительных погрешностей в выведенную формулу для относительной погрешности y:

$$\delta y=\frac{1}{3}\delta(a-b)+\delta m+\delta(n-a)=\frac{1}{3}0{,}0234+0{,}0214+0{,}0114=0{,}0406.$$

Найдем абсолютную погрешность y: $\Delta y=\delta y * y=0{,}0406*0{,}923=0{,}0375.$

Ответ: $y=0{,}923,\ \delta y=0{,}0406,\ \Delta y=0{,}0375.$

В вычислительной практике важное значение имеет обратная задача теории погрешностей - определение допустимых погрешностей приближенных значений аргументов, позволяющих вычислить значение функции с погрешностью, не превышающей заданного ε.

В такой постановке можно найти бесчисленное множество значений Δa_i , обеспечивающих выполнение неравенства $\Delta u \le \varepsilon$.

Поэтому накладываются дополнительные требования на искомые величины, в частности принцип равных влияний, принцип равных абсолютных погрешностей, принцип равных относительных погрешностей.

Общие правила проведения вычислений. При вычислениях рекомендуется пользоваться следующими правилами:

1. При сложении, вычитании, умножении и делении приближенных чисел в результате следует оставлять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом верных знаков.
2. При возведении в степень нужно сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет основание.

3. Если некоторые данные имеют излишние десятичные младшие разряды (при сложении и вычитании) или больше значащих цифр, чем другие (при умножении, делении, возведении в степень, извлечении корня), то их предварительно нужно округлить, сохраняя одну запасную цифру.
4. Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с n верными цифрами исходные данные следует брать с таким числом цифр, чтобы обеспечить в результате n+1 цифру. Затем результат округляется на одну цифру.

Пример 6

Со сколькими верными знаками в широком (узком) смысле следует вычислить $\sqrt{21} = 4,...,$ чтобы

а) абсолютная погрешность не превышала 0,007;

б) относительная погрешность не превышала 1%?

Решение:

а) Если у приближенного числа будет n верных знаков в смысле ω, то его абсолютная погрешность не будет превышать $\omega * 10^{m-n+1}$. Поэтому n следует выбрать таким, чтобы выполнялось неравенство:

$\omega * 10^{m-n+1} \le \varepsilon$,

принимающее для данной задачи следующий вид :

$\omega * 10^{m-n+1} \le 0,007$.

Решая его при $\omega = 1$, получаем $n \ge 4$, а при $\omega = 0,5$ $n \ge 3$.

Следовательно, для того, чтобы абсолютная погрешность приближенного числа $a = \sqrt{21}$ не превышала 0,007, необходимо взять не менее четырех верных знаков в широком смысле: 4,582 (или трех верных знаков в узком смысле: 4,58).

б) Если у приближенного числа будет n верных знаков в смысле ω, то его относительная погрешность не будет превышать $\frac{\omega}{\alpha_1} 10^{1-n}$. Поэтому n следует выбрать таким, чтобы выполнялось неравенство:

$$\frac{\omega}{\alpha_1} 10^{1-n} \le \delta,$$

принимающее для данной задачи следующий вид:

$$\frac{\omega}{4} 10^{1-n} \le 0,01.$$

Решая его при ω = 1 и ω = 0,5, получаем один и тот же результат:
n ≥3. Следовательно, для того, чтобы относительная погрешность приближенного значения $a = \sqrt{21}$ не превышала 1%, необходимо взять не менее трех верных знаков в широком и узком смысле: 4,58.

1.2 Индивидуальное задание №1

Задание: Вычислить и определить погрешности результата.
Варианты № 1, 11, 21

1) $X = \frac{2ab}{\sqrt[3]{c}}$

	а	б	в
a	3,85 (±0,01)	4,16 (±0,005)	7,27 (±0,01)
b	2,0435 (±0,004)	12,163 (±0,002)	5,205 (±0,002)
c	962,6 (±0,1)	55,18 (±0,01)	87,32 (±0,03)

2) $X = \left[\frac{(a+b)c}{m+2n}\right]^3$

	а	б	в
a	4,3 (±0,05)	5,2 (±0,04)	2,13 (±0,01)
b	17,21 (±0,02)	15,32 (±0,01)	22,16 (±0,03)
c	8,2 (±0,05)	7,5 (±0,05)	6,3 (±0,04)
m	12,417 (±0,003)	21,823 (±0,002)	16,825 (±0,004)
n	8,37 (±0,005)	7,56 (±0,003)	8,13 (±0,002)

Варианты № 2, 12, 22

1) $X = \frac{a^3\sqrt{b}}{c}$

	а	б	в
a	228,6 (±0,06)	315,6 (±0,05)	186,7 (±0,04)
b	86,4 (±0,02)	72,5 (±0,03)	66,6 (±0,02)
c	68,7 (±0,05)	53,8 (±0,04)	72,3 (±0,03)

2) $X = \frac{m^2(a-2b)}{c-d}$

	а	б	в
a	13,5 (±0,02)	18,5 (±0,03)	11,8 (±0,02)
b	3,7 (±0,02)	5,6 (±0,02)	7,4 (±0,03)
m	4,22 (±0,004)	3,42 (±0,003)	5,82 (±0,005)
c	34,5 (±0,02)	26,3 (±0,01)	26,7 (±0,03)
d	23,725 (±0,005)	14,782 (±0,006)	11,234 (±0,004)

Варианты № 3, 13, 23

1) $X = \frac{2\sqrt{ab}}{c}$

	а	б	в
a	3,845 (±0,004)	4,632 (±0,003)	7,312 (±0,004)
b	16,2 (±0,05)	23,3 (±0,04)	18,4 (±0,03)
c	10,8 (±0,1)	11,3 (±0,06)	20,2 (±0,08)

2) $X = \frac{(a+b)m}{(c+d)^3}$

	а	б	в
a	2,754 (±0,001)	3,236 (±0,002)	4,523 (±0,003)
b	11,7 (±0,04)	15,8 (±0,03)	10,8 (±0,02)
m	0,56 (±0,005)	0,64 (±0,004)	0,85 (±0,003)
c	10,536 (±0,002)	12,415 (±0,003)	9,318 (±0,002)
d	6,32 (±0,008)	7,18 (±0,006)	4,17 (±0,004)

Варианты № 4, 14, 24

1) $X = \frac{2a^2b}{c}$

	а	б	в
a	3,456 (±0,002)	1,245 (±0,001)	0,327 (±0,005)
b	0,642 (±0,0005)	0,121 (±0,0002)	3,147 (±0,0001)
c	7,12 (±0,004)	2,34 (±0,003)	1,78 (±0,001)

2) $X = \frac{(a+b)^2 m}{\sqrt{c+d}}$

	а	б	в
a	23,16 (±0,02)	17,41 (±0,01)	32,37 (±0,03)
b	8,23 (±0,005)	1,27 (±0,002)	2,35 (±0,001)
c	145,5 (±0,08)	342,3 (±0,04)	128,7 (±0,02)
d	28,6 (±0,1)	11,7 (±0,1)	27,3 (±0,04)
m	0,28 (±0,006)	0,71 (±0,003)	0,93 (±0,001)

Варианты № 5, 15, 25

1) $X = \frac{2ab^3}{c}$

	а	б	в
a	0,643 (±0,0005)	0,142 (±0,0003)	0,258 (±0,0002)
b	2,17 (±0,002)	1,71 (±0,002)	3,45 (±0,001)
c	5,843 (±0,001)	3,727 (±0,001)	7,221 (±0,003)

2) $X = \frac{(a-b)c}{\sqrt{m-n}}$

	а	б	в
a	27,16 (±0,006)	15,71 (±0,005)	12,31 (±0,004)
b	5,03 (±0,01)	3,28 (±0,02)	1,73 (±0,03)
c	3,6 (±0,02)	7,2 (±0,01)	3,7 (±0,02)
m	12,375 (±0,004)	13,752 (±0,001)	17,428 (±0,003)
n	86,2 (±0,05)	33,7 (±0,03)	41,7 (±0,01)

Варианты № 6, 16, 26

1) $X = \frac{3ab}{c^2}$

	a	б	в
a	0,3575 (±0,0002)	0,1756 (±0,0001)	0,2731 (±0,0003)
b	2,63 (±0,01)	3,71 (±0,03)	5,12 (±0,02)
c	0,854 (±0,0005)	0,285 (±0,0002)	0,374 (±0,0001)

2) $X = \frac{(a+b)^2}{\sqrt{(c-d)m}}$

	a	б	в
a	16,342 (±0,001)	12,751 (±0,001)	31,456 (±0,002)
b	2,5 (±0,03)	3,7 (±0,02)	7,3 (±0,01)
c	38,17 (±0,002)	23,76 (±0,003)	33,28 (±0,003)
d	9,14 (±0,005)	8,12 (±0,004)	6,71 (±0,001)
m	3,6 (±0,04)	1,7 (±0,01)	5,8 (±0,02)

Варианты № 7, 17, 27

1) $V = \frac{\pi^2}{4} Dd^3$

	a	б	в
π	3,14	3,14	3,14
D	54 (± 0,5)	72 (± 0,3)	31 (± 0,01)
d	8,235 (± 0,001)	3,274 (± 0,002)	7,345 (± 0,001)

2) $S = \frac{1}{64}\pi\sqrt{D^4 - d^4}$

	a	б	в
D	36,5 (± 0,1)	41,4 (± 0,2)	52,6 (± 0,01)
d	26,35 (± 0,005)	31,75 (± 0,003)	48,39 (± 0,001)
π	3,14	3,14	3,14

Варианты № 8, 18, 28

1) $Y = \frac{m^3 n}{c^3}$

	a	б	в
m	1,6531(± 0,003)	2,348 (± 0,002)	3,804 (± 0,003)
n	3,78 (± 0,002)	4,37 (± 0,004)	4,05 (± 0,003)
c	0,158 (± 0,0005)	0,235 (± 0,0003)	0,318 (± 0,0002)

2) $X = \frac{m\sqrt{a+b}}{c-d}$

	а	б	в
a	9,542 (± 0,001)	8,357 (± 0,003)	4,218 (± 0,001)
b	3,128 (± 0,002)	2,48 (± 0,004)	1,57 (± 0,006)
m	2,8 (± 0,03)	3,17 (± 0,01)	2,32 (± 0,02)
c	0,172 (± 0,001)	1,315 (± 0,0004)	2,418 (± 0,004)
d	5,4 (± 0,02)	2,4 (± 0,02)	1,8 (± 0,01)

Варианты № 9, 19, 29

1) $X = \sqrt{\frac{c-d}{b}}$

	а	б	в
c	0,7568 (± 0,002)	0,8345 (± 0,004)	0,6384 (± 0,002)
d	21,7 (± 0,02)	13,8 (± 0,03)	32,7 (± 0,04)
b	2,65 (± 0,01)	1,84 (± 0,006)	4,88 (± 0,03)

2) $y = \frac{\sqrt[3]{a+b}}{m(n-a)}$

	а	б	в
a	10,82 (± 0,03)	9,37 (± 0,004)	11,45 (± 0,01)
b	2,786 (± 0,0006)	3,108 (± 0,0003)	4,431 (± 0,002)
m	0,28 (± 0,006)	0,46 (± 0,002)	0,75 (± 0,003)
n	14,7 (± 0,06)	15,2 (± 0,04)	16,7 (± 0,05)

Варианты № 10, 20, 30

1) $f = \frac{Qe^3}{48E}$

	а	б	в
Q	54,8 (± 0,02)	38,5 (± 0,01)	17,3 (± 0,03)
e	2,45 (± 0,01)	3,35 (± 0,02)	5,73 (± 0,01)
E	0,863 (± 0,004)	0,734 (± 0,001)	0,956 (± 0,004)

2) $Q = \frac{(2n+1)^2(x-2y)}{x-y}$

	а	б	в
n	2,0435 (± 0,001)	1,1753 (± 0,002)	4,5681 (± 0,001)
x	4,2 (± 0,05)	5,8 (± 0,01)	6,3 (± 0,02)
y	0,82 (± 0,01)	0,65 (± 0,02)	0,42 (± 0,03)

2 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

2.1 Системы линейных уравнений

Запишем систему линейных уравнений следующим образом:

$$A\vec{x} = \vec{b} \qquad (2.1)$$

Считаем, что a_i, $i \neq 0$ (i=1,2,…..,n)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & ..... & ..... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{pmatrix}, \ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Все методы решения систем уравнений можно разбить на условно точные и приближенные. К точным алгоритмам относятся – метод Крамера, Гаусса, Жордана-Гаусса и т.д. Среди приближенных следует отметить, прежде всего, итерационные методы.

В прямых (точных) методах решение $\vec{x}$ системы (2.1) находится за конечное число арифметических действий.

Итерационные методы (методы последовательных приближений) состоят в том, что решение $\vec{x}$ системы (2.1) находится как предел при $n \to \infty$ последовательных приближений $\vec{x}_n$, где n номер итерации. Вычисления проводятся до тех пор, пока не будет выполнена оценка:

$$\left\| \vec{x}_n - \vec{x} \right\| < \varepsilon$$

где ε – некоторое малое число.

2.2 Метод Гаусса

Для того чтобы решить систему методом Гаусса найдем x_1 из первого уравнения системы, подставим его значение во все остальные уравнения и тем самым исключим x_1 из всех уравнений, кроме первого. Взяв теперь полученную систему без первого уравнения, повторяем этот процесс, беря в качестве ведущего элемента коэффициент при x_2 и т.д. Этот процесс, называемый прямым ходом метода Гаусса, продолжается до тех пор, пока в левой части последнего (m-ого) уравнения не останется лишь один член с неизвестным x_m, т.е. матрица системы будет приведена к треугольному виду.

Прямой ход метода Гаусса:

1) коэффициенты:

$$a_{kj}^{(0)} = a_{kj} \ ,$$

где k, j=1,2,..,m

$$c_{kj} = \frac{a^{(k-1)}{}_{kj}}{a_{kk}^{k-1}}, \qquad (2.2)$$

где j=k+1,k+2,…,m

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} c_{kj} \ ,$$

где i, j=k+1, k+2,…, m, k=1,2,…,m-1.

2) правые части:

$$f_K^{(0)} = f_k, y_k = \frac{f_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, k = 1,2,.., m, \qquad (2.3)$$

$$f_i^k = f_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} y_k, i = k+1, k+2,..., m.$$

Коэффициенты c_{ij} и правые части $y_i, i = 1,2,..., m; j = i+1, i+2,...., m$ используются при осуществлении обратного хода.

Обратный ход метода Гаусса состоит в последовательном вычислении искомых неизвестных: решая последнее уравнение, находим единственное неизвестное x_m. Далее, используя это значение, из предыдущего уравнения вычисляем x_{m-1} и т.д. Последним находим x_1 из первого уравнения.

Обратный ход метода Гаусса:

$$x_m = y_m \ ,$$

$$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{m} c_{ij} x_j, i = m-1,...,1. \qquad (2.4)$$

Одной из модификаций метода Гаусса является схема с выбором главного элемента. Она состоит в том, что требование $a_{kk} \neq 0$ (на a_{kk} происходит деление в процессе исключения) заменяется более жестким: из всех оставшихся в матрице элементов нужно выбрать наибольший по модулю и представить уравнение так, чтобы этот элемент оказался на месте ведущего элемента a_{kk}.

Пример 1

Используя схему Гаусса решить систему линейных уравнений с точностью до 0,001.

Решение: вычисления располагаем в таблице:

A	Коэффициенты при неизвестных				Свободные члены	Контрольные суммы	Строчные суммы
	x_1	x_2	x_3	x_4			
	0,68	0,05	-0,11	0,08	2,15	2,85	2,85
	0,21	-0,13	0,27	-0,8	0,44	-0,01	-0,01
	-0,11	-0,84	0,28	0,06	-0,83	-1,44	-1,44
	-0,08	0,15	-0,5	-0,12	1,16	0,61	0,61
B	1	0,0735	-0,1618	0,1176	3,1618	4,1912	4,1911
		-0,1454	0,30398	-0,8247	-0,22398	-0,89015	-0,8901
		-0,8319	0,2622	0,0729	-0,4822	-0,97897	-0,9790
		0,1559	-0,5129	-0,1106	1,4129	0,9453	0,9453
C		1	-2,0906	5,6719	1,5404	6,1221	6,1217
			-1,47697	4,79139	0,7993	4,1140	4,1137
			-0,18697	-0,9948	1,1723	-0,00913	-0,0095
D			1	-3,2441	-0,5411	-2,7854	-2,7852
				-1,6013	1,0711	-0,5299	-0,5302
E				1	-0,6689	0,3309	0,3311
	2,8264	-0,3337	-2,711	-0,6689			
	3,8263	0,6664	-1,7119	0,3309			

В столбец «Строчная сумма» записываются суммы коэффициентов строк матрицы А и свободного члена:

0,68+0,05-0,11+0,08+2,15=2,85;
0,21-0,13+0,27-0,8+0,44=-0,01;
-0,11-0,84+0,28+0,06-0,83=-1,44;
-0,08+0,15-0,5-0,12+1,16=0,61.

Переход к разделу В ведется следующим образом: первую строку делим на коэффициент при x_1, значения в следующих строках получаются как результат разности рассматриваемой строки и первой строки умноженной на значение при x_1 рассматриваемой строки. Результат записываем в раздел В. Значение контрольной суммы вычисляется также как и остальные элементы. Если столбцы «Строчная сумма» и «Контрольная сумма» совпадают (с заданной точностью), то вычисления выполнены верно и можно переходить к следующему шагу.

Элементы первой строки:
0,68/0,68=1;
0,05/0,68=0,0735;
…
2,85/0,68=4,1912.

Элементы второй строки:
0,21-0,21*1=0;
-0,13-0,21*0,0735=-0,1454;
0,27-0,21*(-0,1618)=0,30398;
…
-0,01-0,21*4,1912=-0,89015.
Элементы последней строки:
-0,08-(-0,08)*1=0;
0,15-(-0,08)*0,0735=0,1559;
…
0,61-(-0,08)*4,1912=0,9453.

Аналогично переходим к следующим матрицам C, D, E. Строка с элементом 1 в следующие разделы не переписывается.

В результате обратного хода находятся искомые значения.

2.3 Метод итераций

При большом числе уравнений и неизвестных метод Гаусса мало применим, т.к. его реализация требует слишком большого числа вычислений, а, следовательно, даже при точных исходных данных неизбежно появляются погрешности вычислений, которые будут тем больше, чем больше самих вычислений. Потому для решения больших систем используются итерационные методы, которые обладают следующими преимуществами:

a) Если процесс итерации сходится быстро, т.е. количество приближений меньше, чем порядок системы, то получается выигрыш во времени решения.
b) Метод итераций является самокорректирующимся, т.е. отдельные ошибки не отражаются на конечном результате решения.
c) Процесс итераций легко программируется на ЭВМ.

Рассмотрим один из методов итераций – метод простой итерации.

Разрешим первое уравнение (2.1) относительно x_1 , второе относительно x_2 и т.д. Тогда получим эквивалентную систему:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + ... + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + ... + \alpha_{2n}x_n \\ \text{– – – – – – – – – – – – – – – – – – –} \\ x_n = \beta_n + \alpha_{12}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + ... + \alpha_{n,n-1}x_{n-1} \end{cases}, \quad (2.5)$$

где $\beta_i = \frac{b_{ij}}{a_{ii}}$, $\alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$, при $i \neq j$, $\alpha_{ij} = 0$ при $i = j$, $i, j = 1,2,3,...,n$.

Введя матрицы:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Систему (2.5) можно записать в виде:

$$\vec{x} = \vec{\beta} + \alpha \cdot \vec{x}\,. \qquad (2.5')$$

Систему (2.5’) будем решать методом последовательных приближений. За нулевое приближение принимаем, например:

$$\vec{x}^{(0)} = \vec{\beta}\,.$$

Далее последовательно строим:

$$\begin{gathered} \vec{x}^{(1)} = \vec{\beta} + \alpha \cdot \vec{x}^{(0)} \text{(первое приближение)} \\ \vec{x}^{(2)} = \vec{\beta} + \alpha \cdot \vec{x}^{(1)} \text{(второе приближение)} \qquad (2.6) \\ \text{- - - - - - - - - - - - -} \\ \vec{x}^{(k+1)} = \vec{\beta} + \alpha \cdot \vec{x}^{(k)} \text{(k=0,1,2,…..).} \end{gathered}$$

Если последовательность приближений $\vec{x}^{(0)}, \vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(k)}, \dots$ имеет предел $\vec{x} = \lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}^{(k)}$, то этот предел является решением системы (2.5).

Последовательность векторов $\left\{\vec{x}^{(k)}\right\}$ (k=0,1,2,…..), сходится к точному решению если норма матрицы α:

$$\|\alpha\| < 1. \qquad (2.7)$$

Норма $\|\alpha\|$ определяется по одному из следующих способов:

$$\begin{gathered} \|\alpha\|_{\text{ь}} = \max_i \sum_j |a_{ij}|, \\ \|\alpha\|_l = \max_j \sum_i |a_{ij}|, \qquad (2.8) \\ \|\alpha\|_k = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^{\,2}}\,. \end{gathered}$$

Оценить число шагов дающих решение с заданной точностью можно по формуле:

$$\left\|X^* - X^k\right\| \le \frac{\left\|\alpha\right\|^{k+1}}{1-\left\|\alpha\right\|} * \left\|F\right\| \le \varepsilon \quad . \qquad (2.9)$$

Теоретическая оценка числа итераций, необходимых для обеспечения заданной точности, практически всегда очень завышена.

2.4 Метод Зейделя

Метод Зейделя представляет собой некоторую модификацию метода итераций. Основная его идея заключается в том, чтобы при выполнении k+1-го приближения переменной x_i учитываются уже вычисленные ранее k-е приближения неизвестных $x_1, x_2, \ldots x_{i-1}$:

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i \ (\text{i}=1,2,\ldots,\text{n}), \qquad (2.10)$$

произвольно выбираем $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$. Далее, предполагая, что k-е приближения $x_i^{(k)}$ корней известны, согласно Зейделю будем строить (k+1)-е приближения по следующим формулам:

$$x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} \cdot x_j^{(k)} ,$$

$$x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21} \cdot x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{2j} x_j^k ,$$

$$\text{- - - - - - - - - - - - - - - - - - -}$$

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} ,$$

$$\text{- -} \qquad (2.11)$$

$$x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} \cdot x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)} .$$

$$(\text{k}=0,1,2,\ldots)$$

Обычно метод Зейделя дает лучшую сходимость, чем метод простой итерации, но он приводит к более громоздким вычислениям.

Пример 2

Решить систему линейных уравнений методом простой итерации и методом Зейделя, с точностью до 0,001.

Решение:

$$\begin{cases} 4{,}5x_1 - 2{,}1x_2 + 3{,}4x_3 = -2{,}0 & (1) \\ 3{,}1x_1 + 2{,}3x_2 - 1{,}3x_3 = 3{,}5 & (2) \\ 1{,}8x_1 + 2{,}4x_2 + 4{,}5x_3 = 2{,}4 & (3) \end{cases}$$

Приведем систему к виду, в котором элементы главной диагонали превосходили бы остальные элементы строк:

$$\begin{cases} 7{,}6x_1 + 0{,}2x_2 + 2{,}1x_3 = 1{,}5 & (1)+(2) \\ 2{,}2x_1 + 9{,}2x_2 + 4{,}3x_3 = 10{,}3 & 2(3)+(2)-(1) \\ -1{,}3x_1 + 0{,}1x_2 + 5{,}8x_3 = -1{,}1 & (3)-(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x_1 = 1{,}5 + 2{,}4x_1 - 0{,}2x_2 - 2{,}1x_3 \\ 10x_2 = 10{,}3 - 2{,}2x_1 + 0{,}8x_2 - 4{,}3x_3 \\ 10x_3 = -1{,}1 + 1{,}3x_1 - 0{,}1x_2 + 4{,}2x_3 \end{cases} => \quad \begin{cases} x_1 = 0{,}15 + 0{,}24x_1 - 0{,}02x_2 - 0{,}21x_3 \\ x_2 = 1{,}03 - 0{,}22x_1 + 0{,}08x_2 - 0{,}43x_3 \\ x_3 = -0{,}11 + 0{,}13x_1 - 0{,}01x_2 + 0{,}42x_3 \end{cases}$$

Число шагов, дающих ответ с точностью до 0,001, определим с помощью соотношения:

$$\left\| X^* - X^k \right\| \le \frac{\|A\|^{k+1}}{1-\|A\|} * \|F\| \le 0.001; \qquad (2.12)$$

Здесь $\|A\|=\max\{0{,}47,\ 0{,}73,\ 0{,}56\}<1$; значит итерационный процесс сходится; $\|F\|=1.5$.

Имеем:

$$\frac{0{,}73^{k+1}}{0{,}27} * 1{,}5 < 0{,}001; \quad 0{,}73^{k+1} < \frac{0{,}001 * 0{,}27}{1{,}5}; \quad (k+1) * \lg 0{,}73 < -3 + \lg 0{,}27 - \lg 1{,}5;$$

$$k+1 > 27{,}4; \quad k \ge 27;$$

Вычисления располагаем в таблице:

k	$x1$	$x2$	$x3$
0	0,15	1,03	-0,11
1	0,1885	1,1267	-0,1470
2	0,2036	1,1419	-0,1585
3	0,2093	1,1447	-0,1615
4	0,2113	1,1450	-0,1621
5	0,2118	1,1448	-0,1621
6	0,2120	1,1447	-0,1620
7	0,2120	1,1446	-0,1619

Сходимость в тысячных долях наблюдается уже на седьмом шаге.
Ответ: $x_1 \approx 0{,}212;\ \ x_2 \approx 1{,}145;\ \ x_3 \approx -0{,}162.$

Решим систему методом Зейделя:
Здесь $\|A\|=\max\{0{,}47,\ 0{,}73,\ 0{,}56\}<1$; значит метод Зейделя сходится;

k	x1	x2	x3
0	0,15	1,03	-0,11
1	0,1885	1,1182	-0,1429
2	0,2029	1,1363	-0,1550
3	0,2085	1,1417	-0,1594
4	0,2107	1,1435	-0,1610
5	0,2115	1,1442	-0,1616
6	0,2118	1,1444	-0,1618

Ответ: $x_1 \approx 0{,}212;\ \ x_2 \approx 1{,}145;\ \ x_3 \approx -0{,}162.$

2.5 Индивидуальное задание №2.1

Задание: Используя схему Гаусса решить систему линейных уравнений с точностью до 0,001.

Вариант №1

$$\begin{cases} 4{,}4x_1 - 2{,}5x_2 + 19{,}2x_3 - 10{,}8x_4 = 4{,}3 \\ 5{,}5x_1 - 9{,}3x_2 - 14{,}2x_3 + 13{,}2x_4 = 6{,}8 \\ 7{,}1x_1 - 11{,}5x_2 + 5{,}3x_3 - 6{,}7x_4 = -1{,}8 \\ 14{,}2x_1 + 23{,}4x_2 - 8{,}8x_3 + 5{,}3x_4 = 7{,}2 \end{cases}$$

Вариант №2

$$\begin{cases} 8{,}2x_1 - 3{,}2x_2 + 14{,}2x_3 + 14{,}8x_4 = -8{,}4 \\ 5{,}6x_1 - 12x_2 + 15x_3 - 6{,}4x_4 = 4{,}5 \\ 5{,}7x_1 + 3{,}6x_2 - 12{,}4x_3 - 2{,}3x_4 = 3{,}3 \\ 6{,}8x_1 + 13{,}2x_2 - 6{,}3x_3 - 8{,}7x_4 = 14{,}3 \end{cases}$$

Вариант №3

$$\begin{cases} 5{,}7x_1 - 7{,}8x_2 - 5{,}6x_3 - 8{,}3x_4 = 2{,}7 \\ 6{,}6x_1 + 13{,}1x_2 - 6{,}3x_3 + 4{,}3x_4 = -5{,}5 \\ 14{,}7x_1 - 2{,}8x_2 + 5{,}6x_3 - 12{,}1x_4 = 8{,}6 \\ 8{,}5x_1 + 12{,}7x_2 - 23{,}7x_3 + 5{,}7x_4 = 14{,}7 \end{cases}$$

Вариант №4

$$\begin{cases} 3{,}8x_1 + 14{,}2x_2 + 6{,}3x_3 - 15{,}5x_4 = 2{,}8 \\ 8{,}3x_1 - 6{,}6x_2 + 5{,}8x_3 + 12{,}2x_4 = -4{,}7 \\ 6{,}4x_1 - 8{,}5x_2 - 4{,}3x_3 + 8{,}8x_4 = 7{,}7 \\ 17{,}1x_1 - 8{,}3x_2 + 14{,}4x_3 - 7{,}2x_4 = 13{,}5 \end{cases}$$

Вариант №5

$$\begin{cases} 15{,}7x_1 + 6{,}6x_2 - 5{,}7x_3 + 11{,}5x_4 = -2{,}4 \\ 8{,}8x_1 - 6{,}7x_2 + 5{,}5x_3 - 4{,}5x_4 = 5{,}6 \\ 6{,}3x_1 - 5{,}7x_2 - 23{,}4x_3 + 6{,}6x_4 = 7{,}7 \\ 14{,}3x_1 + 8{,}7x_2 - 15{,}7x_3 - 5{,}8x_4 = 23{,}4 \end{cases}$$

Вариант №6

$$\begin{cases} 4{,}3x_1 - 12{,}1x_2 + 23{,}2x_3 - 14{,}1x_4 = 15{,}5 \\ 2{,}4x_1 - 4{,}4x_2 + 3{,}5x_3 + 5{,}5x_4 = 2{,}5 \\ 5{,}4x_1 + 8{,}3x_2 - 7{,}4x_3 - 12{,}7x_4 = 8{,}6 \\ 6{,}3x_1 - 7{,}6x_2 + 1{,}34x_3 + 3{,}7x_4 = 12{,}1 \end{cases}$$

Вариант №7

$$\begin{cases} 14{,}4x_1 - 5{,}3x_2 + 14{,}3x_3 - 12{,}7x_4 = -14{,}4 \\ 23{,}4x_1 - 14{,}2x_2 - 5{,}4x_3 + 2{,}1x_4 = 6{,}6 \\ 6{,}3x_1 - 13{,}2x_2 - 6{,}5x_3 + 14{,}3x_4 = 9{,}4 \\ 5{,}6x_1 + 8{,}8x_2 - 6{,}7x_3 - 23{,}8x_4 = 7{,}3 \end{cases}$$

Вариант №8

$$\begin{cases} 1{,}7x_1 + 10x_2 - 1{,}3x_3 + 2{,}1x_4 = 3{,}1 \\ 3{,}1x_1 + 1{,}7x_2 - 2{,}1x_3 + 5{,}4x_4 = 2{,}1 \\ 3{,}3x_1 - 7{,}7x_2 + 4{,}4x_3 - 5{,}1x_4 = 1{,}9 \\ 10x_1 - 20{,}1x_2 + 20{,}4x_3 + 1{,}7x_4 = 1{,}8 \end{cases}$$

Вариант №9

$$\begin{cases} 1{,}7x_1 - 1{,}8x_2 + 1{,}9x_3 - 57{,}4x_4 = 10 \\ 1{,}1x_1 - 4{,}3x_2 + 1{,}5x_3 - 1{,}7x_4 = 19 \\ 1{,}2x_1 + 1{,}4x_2 + 1{,}6x_3 + 1{,}8x_4 = 20 \\ 7{,}1x_1 - 1{,}3x_2 - 4{,}1x_3 + 5{,}2x_4 = 10 \end{cases}$$

Вариант №10

$$\begin{cases} 6{,}1x_1 + 6{,}2x_2 - 6{,}3x_3 + 6{,}4x_4 = 6{,}5 \\ 1{,}1x_1 - 1{,}5x_2 + 2{,}2x_3 - 3{,}8x_4 = 4{,}2 \\ 5{,}1x_1 - 5{,}0x_2 + 4{,}9x_3 - 4{,}8x_4 = 4{,}7 \\ 1{,}8x_1 + 1{,}9x_2 + 2{,}0x_3 - 2{,}1x_4 = 2{,}2 \end{cases}$$

Вариант №11

$$\begin{cases} 2{,}2x_1 - 3{,}1x_2 + 4{,}2x_3 - 5{,}1x_4 = 6{,}01 \\ 1{,}3x_1 + 2{,}2x_2 - 1{,}4x_3 + 1{,}5x_4 = 10 \\ 6{,}2x_1 - 7{,}4x_2 + 8{,}5x_3 - 9{,}6x_4 = 1{,}1 \\ 1{,}2x_1 + 1{,}3x_2 + 1{,}4x_3 + 4{,}5x_4 = 1{,}6 \end{cases}$$

Вариант №12

$$\begin{cases} 35{,}8x_1 + 2{,}1x_2 - 34{,}5x_3 - 11{,}8x_4 = 0{,}5 \\ 27{,}1x_1 - 7{,}5x_2 + 11{,}7x_3 - 23{,}5x_4 = 12{,}8 \\ 11{,}7x_1 + 1{,}8x_2 - 6{,}5x_3 + 7{,}1x_4 = 1{,}7 \\ 6{,}3x_1 + 10x_2 + 7{,}1x_3 + 3{,}4x_4 = 20{,}8 \end{cases}$$

Вариант №13

$$\begin{cases} 35{,}1x_1 + 1{,}7x_2 + 37{,}5x_3 - 2{,}8x_4 = 7{,}5 \\ 45{,}2x_1 + 21{,}1x_2 - 1{,}1x_3 - 1{,}2x_4 = 11{,}1 \\ -21{,}1x_1 + 31{,}7x_2 + 1{,}2x_3 - 1{,}5x_4 = 2{,}1 \\ 31{,}7x_1 + 18{,}1x_2 - 31{,}7x_3 + 2{,}2x_4 = 0{,}5 \end{cases}$$

Вариант №14

$$\begin{cases} 1{,}1x_1 + 11{,}2x_2 + 11{,}1x_3 - 13{,}1x_4 = 1{,}3 \\ -3{,}3x_1 + 1{,}1x_2 + 30{,}1x_3 - 20{,}1x_4 = 1{,}1 \\ 7{,}5x_1 + 1{,}3x_2 + 1{,}1x_3 + 10x_4 = 20 \\ 1{,}7x_1 + 7{,}5x_2 - 1{,}8x_3 + 2{,}1x_4 = 1{,}1 \end{cases}$$

Вариант №15

$$\begin{cases} 7{,}5x_1 + 1{,}8x_2 - 2{,}1x_3 - 7{,}7x_4 = 1{,}1 \\ -10x_1 + 1{,}3x_2 - 20x_3 - 1{,}4x_4 = 1{,}5 \\ 2{,}8x_1 - 1{,}7x_2 + 3{,}9x_3 + 4{,}8x_4 = 1{,}2 \\ 10x_1 + 31{,}4x_2 - 2{,}1x_3 - 10x_4 = -1{,}1 \end{cases}$$

Вариант №16

$$\begin{cases} 30{,}1x_1 - 1{,}4x_2 + 10x_3 - 1{,}5x_4 = 10 \\ -17{,}5x_1 + 11{,}1x_2 + 1{,}3x_3 - 7{,}5x_4 = 1{,}3 \\ 1{,}7x_1 - 21{,}1x_2 + 7{,}1x_3 - 17{,}1x_4 = 10 \\ 2{,}1x_1 + 2{,}1x_2 + 3{,}5x_3 + 3{,}3x_4 = 1{,}7 \end{cases}$$

Вариант №17

$$\begin{cases} 7{,}3x_1 - 8{,}1x_2 + 12{,}7x_3 - 6{,}7x_4 = 8{,}8 \\ 11{,}5x_1 + 6{,}2x_2 - 8{,}3x_3 + 9{,}2x_4 = 21{,}5 \\ 8{,}2x_1 - 5{,}4x_2 + 4{,}3x_3 - 2{,}5x_4 = 6{,}2 \\ 2{,}4x_1 + 11{,}5x_2 - 3{,}3x_3 + 14{,}2x_4 = -6{,}2 \end{cases}$$

Вариант №18

$$\begin{cases} 4{,}8x_1 + 12{,}5x_2 - 6{,}3x_3 - 9{,}7x_4 = 3{,}5 \\ 22x_1 - 31{,}7x_2 + 12{,}4x_3 - 8{,}7x_4 = 4{,}6 \\ 15x_1 + 21{,}1x_2 - 4{,}5x_3 + 14{,}4x_4 = 15 \\ 8{,}6x_1 - 14{,}4x_2 + 6{,}2x_3 + 2{,}8x_4 = -1{,}2 \end{cases}$$

Вариант №19

$$\begin{cases} 6,4x_1 + 7,2x_2 - 8,3x_3 + 42x_4 = 2,23 \\ 5,8x_1 - 8,3x_2 + 14,3x_3 - 6,2x_4 = 17,1 \\ 8,6x_1 + 7,7x_2 - 18,3x_3 + 8,8x_4 = -5,4 \\ 13,2x_1 - 5,2x_2 - 6,5x_3 + 12,2x_4 = 6,5 \end{cases}$$

Вариант №20

$$\begin{cases} 14,2x_1 + 3,2x_2 - 4,2x_3 + 8,5x_4 = 13,2 \\ 6,3x_1 - 4,3x_2 + 12,7x_3 - 5,8x_4 = -4,4 \\ 8,4x_1 - 22,3x_2 - 5,2x_3 + 4,7x_4 = 6,4 \\ 2,7x_1 + 13,7x_2 + 6,4x_3 - 12,7x_4 = 8,5 \end{cases}$$

Вариант №21

$$\begin{cases} 7,3x_1 + 12,4x_2 - 3,8x_3 - 14,3x_4 = 5,8 \\ 10,7x_1 - 7,7x_2 + 12,5x_3 + 6,6x_4 = -6,6 \\ 15,6x_1 + 6,6x_2 + 14,4x_3 - 8,7x_4 = 12,4 \\ 7,5x_1 + 12,2x_2 - 8,3x_3 + 3,7x_4 = 9,2 \end{cases}$$

Вариант №22

$$\begin{cases} 13,2x_1 - 8,3x_2 - 4,4x_3 + 6,2x_4 = 6,8 \\ 8,3x_1 + 4,2x_2 - 5,6x_3 + 7,7x_4 = 12,4 \\ 5,8x_1 - 3,7x_2 + 12,4x_3 - 6,2x_4 = 8,7 \\ 3,5x_1 + 6,6x_2 - 13,8x_3 - 9,3x_4 = -10,8 \end{cases}$$

Вариант №23

$$\begin{cases} 8,1x_1 + 1,2x_2 - 9,1x_3 + 1,7x_4 = 10 \\ 1,1x_1 - 1,7x_2 + 7,2x_3 - 3,4x_4 = 1,7 \\ 1,7x_1 - 1,8x_2 + 10x_3 + 2,3x_4 = 2,1 \\ 1,3x_1 + 1,7x_2 - 9,9x_3 + 3,5x_4 = 27,1 \end{cases}$$

Вариант №24

$$\begin{cases} 3,3x_1 - 2,2x_2 - 10x_3 + 1,7x_4 = 1,1 \\ 1,8x_1 + 21,1x_2 + 1,3x_3 - 2,2x_4 = 2,2 \\ -10x_1 + 1,1x_2 + 20x_3 - 4,5x_4 = 10 \\ 70x_1 - 1,7x_2 - 2,2x_3 + 3,3x_4 = 2,1 \end{cases}$$

Вариант №25

$$\begin{cases} 1,7x_1 + 9,9x_2 - 20x_3 - 1,7x_4 = 1,7 \\ 20x_1 + 0,5x_2 - 30,1x_3 - 1,1x_4 = 2,1 \\ 10x_1 - 20x_2 + 30,2x_3 + 0,5x_4 = 1,8 \\ 3,3x_1 - 0,7x_2 + 3,3x_3 + 20x_4 = -1,7 \end{cases}$$

Вариант №26

$$\begin{cases} 1,7x_1 - 1,3x_2 - 1,1x_3 - 1,2x_4 = 2,2 \\ 10x_1 - 10x_2 - 1,3x_3 + 1,3x_4 = 1,1 \\ 3,5x_1 + 3,3x_2 + 1,2x_3 + 1,3x_4 = 1,2 \\ 1,3x_1 + 1,1x_2 - 1,3x_3 - 1,1x_4 = 10 \end{cases}$$

Вариант №27

$$\begin{cases} 1,1x_1 + 11,3x_2 - 1,7x_3 + 1,8x_4 = 10 \\ 1,3x_1 - 11,7x_2 + 1,8x_3 + 1,4x_4 = 1,3 \\ 1,1x_1 - 10,5x_2 - 1,7x_3 - 1,5x_4 = 1,1 \\ 1,5x_1 - 0,5x_2 + 1,8x_3 - 1,1x_4 = 10 \end{cases}$$

Вариант №28

$$\begin{cases} 1,4x_1 + 2,1x_2 - 3,3x_3 + 1,1x_4 = 10 \\ 10x_1 - 1,7x_2 + 1,1x_3 - 1,5x_4 = 1,7 \\ 2,2x_1 + 34,4x_2 - 1,1x_3 - 1,2x_4 = 20 \\ 1,1x_1 + 1,3x_2 + 1,2x_3 + 1,4x_4 = 1,3 \end{cases}$$

Вариант №29

$$\begin{cases} 1,3x_1 - 1,7x_2 + 3,3x_3 + 1,7x_4 = 1,1 \\ 10x_1 + 5,5x_2 - 1,3x_3 + 3,4x_4 = 1,3 \\ 1,1x_1 + 1,8x_2 - 2,2x_3 - 1,1x_4 = 10 \\ 1,3x_1 - 1,2x_2 + 2,1x_3 + 2,2x_4 = 1,8 \end{cases}$$

Вариант №30

$$\begin{cases} 1,2x_1 + 1,8x_2 - 2,2x_3 - 4,1x_4 = 1,3 \\ 10x_1 - 5,1x_2 + 1,2x_3 + 5,5x_4 = 1,2 \\ 2,2x_1 - 30,1x_2 + 3,1x_3 + 5,8x_4 = 10 \\ 10x_1 + 2,4x_2 - 30,5x_3 - 2,2x_4 = 34,1 \end{cases}$$

2.5 Индивидуальное задание №2.2

Задание: Решить систему линейных уравнений методом простой итерации и методом Зейделя, с точностью до 0,001.

Вариант №1

$$\begin{cases} 2,7x_1 + 3,3x_2 + 1,3x_3 = 2,1 \\ 3,5x_1 - 1,7x_2 + 2,8x_3 = 1,7 \\ 4,1x_1 + 5,8x_2 - 1,7x = 0,8 \end{cases}$$

Вариант №2

$$\begin{cases} 1,7x_1 + 2,8x_2 + 1,9x_3 = 0,7 \\ 2,1x_1 + 3,4x_2 + 1,8x_3 = 1,1 \\ 4,2x_1 - 1,7x_2 + 1,3x_3 = 2,8 \end{cases}$$

Вариант №3

$$\begin{cases} 3,1x_1 + 2,8x_2 + 1,9x_3 = 0,2 \\ 1,9x_1 + 3,1x_2 + 2,1x_3 = 2,1 \\ 7,7x_5 + 3,8x_2 + 4,8x_3 = 5,6 \end{cases}$$

Вариант №4

$$\begin{cases} 9,1x_1 + 5,6x_2 + 7,8x_3 = 9,8 \\ 3,8x_1 + 5,1x_2 + 2,8x_3 = 6,7 \\ 4,1x_1 + 5,7x_2 + 1,2x_3 = 5,8 \end{cases}$$

Вариант №5

$$\begin{cases} 3,3x_1 + 2,1x_2 + 2,8x_3 = 0,8 \\ 4,1x_1 + 3,7x_2 + 4,8x_3 = 5,7 \\ 2,7x_1 + 1,8x_2 + 1,1x_3 = 3,2 \end{cases}$$

Вариант №6

$$\begin{cases} 7,6x_1 + 5,8x_2 + 4,7x_3 = 10,1 \\ 3,8x_1 + 4,1x_2 + 2,7x_3 = 9,7 \\ 2,9x_1 + 2,1x_2 + 3,8x_3 = 7,8 \end{cases}$$

Вариант №7

$$\begin{cases} 3,2x_1 - 2,5x_2 + 3,7x_3 = 6,5 \\ 0,5x_1 + 0,34x_2 + 1,7x_3 = -0,24 \\ 1,6x_1 + 2,3x_2 - 1,5x_3 = 4,3 \end{cases}$$

Вариант №8

$$\begin{cases} 5,4x_1 - 2,3x_2 + 3,4x_3 = -3,5 \\ 4,2x_1 + 1,7x_2 - 2,3x_3 = 2,7 \\ 3,4x_1 + 2,4x_2 + 7,4x_3 = 1,9 \end{cases}$$

Вариант №9

$$\begin{cases} 3,6x_1 + 1,8x_2 - 4,7x_3 = 3,8 \\ 2,7x_1 - 3,6x_2 + 1,9x_3 = 0,4 \\ 1,5x_1 + 4,5x_2 + 3,3x_3 = -1,6 \end{cases}$$

Вариант №10

$$\begin{cases} 5,6x_1 + 2,7x_2 - 1,7x_3 = 1,9 \\ 3,4x_1 - 3,6x_2 - 6,7x_3 = -2,4 \\ 0,8x_1 + 1,3x_2 + 3,7x_3 = 1,2 \end{cases}$$

Вариант №11

$$\begin{cases} 2,7x_1 + 0,9x_2 - 1,5x_3 = 3,5 \\ 4,5x_1 - 2,8x_2 + 6,7x_3 = 2,6 \\ 5,1x_1 + 3,7x_2 - 1,4x_3 = -0,14 \end{cases}$$

Вариант №12

$$\begin{cases} 4,5x_1 - 3,5x_2 + 7,4x_3 = 2,5 \\ 3,1x_1 - 0,6x_2 - 2,3x_3 = -1,5 \\ 0,8x_1 + 7,4x_2 - 0,5x_3 = 6,4 \end{cases}$$

Вариант №13

$$\begin{cases} 3{,}8x_1 + 6{,}7x_2 - 1{,}2x_3 = 5{,}2 \\ 6{,}4x_1 + 1{,}3x_2 - 2{,}7x_3 = 3{,}8 \\ 2{,}4x_1 - 4{,}5x_2 + 3{,}5x_3 = -0{,}6 \end{cases}$$

Вариант №14

$$\begin{cases} 5{,}4x_1 - 6{,}2x_2 - 0{,}5x_3 = 0{,}52 \\ 3{,}4x_1 + 2{,}3x_2 + 0{,}8x_3 = -0{,}8 \\ 2{,}4x_1 - 1{,}1x_2 + 3{,}8x_3 = 1{,}8 \end{cases}$$

Вариант №15

$$\begin{cases} 7{,}8x_1 + 5{,}3x_2 + 4{,}8x_3 = 1{,}8 \\ 3{,}3x_1 + 1{,}1x_2 + 1{,}8x_3 = 2{,}3 \\ 4{,}5x_1 + 3{,}3x_2 + 2{,}8x_3 = 3{,}4 \end{cases}$$

Вариант №16

$$\begin{cases} 3{,}8x_1 + 4{,}1x_2 - 2{,}3x_3 = 4{,}8 \\ -2{,}1x_1 + 3{,}9x_2 - 5{,}8x_3 = 3{,}3 \\ 1{,}8x_1 + 1{,}1x_2 - 2{,}1x_3 = 5{,}8 \end{cases}$$

Вариант №17

$$\begin{cases} 1{,}7x_1 - 2{,}2x_2 + 3{,}0x_3 = 1{,}8 \\ 2{,}1x_1 + 1{,}9x_2 - 2{,}3x_3 = 2{,}8 \\ 4{,}2x_1 + 3{,}9x_2 - 3{,}1x_3 = 5{,}1 \end{cases}$$

Вариант №18

$$\begin{cases} 2{,}8x_1 + 3{,}8x_2 - 3{,}2x_3 = 4{,}5 \\ 2{,}5x_1 - 2{,}8x_2 + 3{,}3x_3 = 7{,}1 \\ 6{,}5x_1 - 7{,}1x_2 + 4{,}8x_3 = 6{,}3 \end{cases}$$

Вариант №19

$$\begin{cases} 3{,}3x_1 + 3{,}7x_2 + 4{,}2x_3 = 5{,}8 \\ 2{,}7x_1 + 2{,}3x_2 - 2{,}9x_3 = 6{,}1 \\ 4{,}1x_1 + 4{,}8x_2 - 5{,}0x_3 = 7{,}0 \end{cases}$$

Вариант №20

$$\begin{cases} 7{,}1x_1 + 6{,}8x_2 + 6{,}1x_3 = 7{,}0 \\ 5{,}0x_1 + 4{,}8x_2 + 5{,}3x_3 = 6{,}1 \\ 8{,}2x_1 + 7{,}8x_2 + 7{,}1x_3 = 5{,}8 \end{cases}$$

Вариант №21

$$\begin{cases} 3{,}7x_1 + 3{,}1x_2 + 4{,}0x_3 = 5{,}0 \\ 4{,}1x_1 + 4{,}5x_2 - 4{,}8x_3 = 4{,}9 \\ -2{,}1x_1 - 3{,}7x_2 + 1{,}8x_3 = 2{,}7 \end{cases}$$

Вариант №22

$$\begin{cases} 4{,}1x_1 + 5{,}2x_2 - 5{,}8x_3 = 7{,}0 \\ 3{,}8x_1 - 3{,}1x_2 + 4{,}0x_3 = 5{,}3 \\ 7{,}8x_1 + 5{,}3x_2 - 6{,}3x_3 = 5{,}8 \end{cases}$$

Вариант №23

$$\begin{cases} 3{,}7x_1 - 2{,}3x_2 + 4{,}5x_3 = 2{,}4 \\ 2{,}5x_1 + 4{,}7x_2 - 7{,}8x_3 = 3{,}5 \\ 1{,}6x_1 + 5{,}3x_2 + 1{,}3x_3 = -2{,}4 \end{cases}$$

Вариант №24

$$\begin{cases} 6{,}3x_1 + 5{,}2x_2 - 0{,}6x_3 = 1{,}5 \\ 3{,}4x_1 - 2{,}3x_2 + 3{,}4x_3 = 2{,}7 \\ 0{,}8x_1 + 1{,}4x_2 + 3{,}5x_3 = -2{,}3 \end{cases}$$

Вариант №25

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 2{,}3x_2 - 3{,}7x_3 = 4{,}5 \\ 2{,}8x_1 + 3{,}4x_2 + 5{,}8x_3 = -3{,}2 \\ 1{,}2x_1 + 7{,}3x_2 - 2{,}3x_3 = 5{,}6 \end{cases}$$

Вариант №26

$$\begin{cases} 0{,}9x_1 + 2{,}7x_2 - 3{,}8x_3 = 2{,}4 \\ 2{,}5x_1 + 5{,}8x_2 - 0{,}5x_3 = 3{,}5 \\ 4{,}5x_1 - 2{,}1x_2 + 3{,}2x_3 = -1{,}2 \end{cases}$$

Вариант №27

$$\begin{cases} 2,4x_1 + 2,5x_2 - 2,9x_3 = 4,5 \\ 0,8x_1 + 3,5x_2 - 1,4x_3 = 3,2 \\ 1,5x_1 - 2,3x_2 + 8,6x_3 = -5,5 \end{cases}$$

Вариант №28

$$\begin{cases} 5,4x_1 - 2,4x_2 + 3,8x_3 = 5,5 \\ 2,5x_1 + 6,8x_2 - 1,1x_3 = 4,3 \\ 2,7x_1 - 0,6x_2 + 1,5x_3 = 3,5 \end{cases}$$

Вариант №29

$$\begin{cases} 2,4x_1 + 3,7x_2 - 8,3x_3 = 2,3 \\ 1,8x_1 + 4,3x_2 + 1,2x_3 = -1,2 \\ 3,4x_1 - 2,3x_2 + 5,2x_3 = 3,5 \end{cases}$$

Вариант №30

$$\begin{cases} 3,2x_1 - 11,5x_2 + 3,8x_3 = 2,8 \\ 0,8x_1 + 1,3x_2 - 6,4x_3 = -6,5 \\ 2,4x_1 + 7,2x_2 - 1,2x_3 = 4,5 \end{cases}$$

3 РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1 Этапы решения нелинейных уравнений

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$.

Всякое число ζ, обращающее функцию в ноль, то есть такое, что $f(\zeta) \equiv 0$ называется корнем (нулем) функции или корнем уравнения:

$$f(x) = 0. \qquad (3.1)$$

Приближенное вычисление корня, как правило, распадается на две задачи:

1. Отделение корней, то есть определение интервалов, в каждом из которых содержится только один корень уравнения.

2. Уточнение корня, то есть вычисление его с заданной степенью точности.

Задача отделения корней решается аналитическими и графическими методами.

Аналитические методы.

При отделении корней уравнения общего вида (3.1) часто используется известная из курса математического анализа теорема Больцано-Коши:

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков, то есть $f(a)*f(b)<0$. Тогда существует такая точка ζ, принадлежащая интервалу (a,b), в которой функция обращается в ноль.

Заметим, что корень будет единственным, если $f'(x)$ существует и сохраняет знак на рассматриваемом отрезке.

Геометрические методы.

Полезно составить таблицу значений $f(x)$. По таблице можно построить график функции $y=f(x)$ и графически найти точки его пересечения с осью абсцисс. Этот способ более нагляден и дает неплохие приближенные значения корней. Построение графиков зачастую позволяет выявить даже корни четной кратности.

Иногда удается заменить уравнение (3.1) эквивалентным ему уравнением $\varphi(x)=\psi(x)$ в котором функции $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$ имеют несложные графики. Например, уравнение $x\sin x-1=0$ удобно преобразовать к виду $\sin x=1/x$. Абсциссы точек пересечения этих графиков будут корнями исходного уравнения.

3.2 Методы уточнения корней

Рассмотрим теперь задачу уточнения корня, то есть задачу вычисления корня ζ с заданной степенью точности ε. В дальнейшем во всех методах будем предполагать, что корень уравнения (3.1) отделен на отрезке $[a,b]$ и функция $f(x)$ непрерывна вместе со своей производной.

3.2.1 Метод хорд

Одним из простейших методов уточнения корня является метод хорд, или, как еще его называют, метод пропорциональных частей. Для реализации этого метода необходимо предварительно выбрать отрезок $[a,b]$, содержащий искомый корень так, чтобы $f(a)*f(b)<0$, $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняли знак и не обращались в 0 при $x \in [a,b]$. Определим величину m_1 так, чтобы при $x \in [a,b]$ выполнялось неравенство:

$$|f'(x)| \geq m_1 > 0. \qquad (3.2)$$

Последовательность приближенных значений $\{x_n\}$ корня ζ строится по формуле:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(c)}(x_n - c), \ n = 0,1,2... \qquad (3.3)$$

где c – один из концов отрезка $[a,b]$, удовлетворяющий условию: $f(c)f''(c)>0$.

За начальное приближение x_0 в методе хорд принимается конец отрезка, противоположный c. Абсолютная погрешность Δx_{n+1} приближения x_{n+1} оценивается формулой:

$$\Delta x_{n+1} = \frac{|f(x_{n+1})|}{m_1}. \qquad (3.4)$$

Сформулируем алгоритм метода хорд.

Шаг 1. $N=0$.

Шаг 2. Если $f(a)f''(a)>0$, то идти на шаг 4.

Шаг 3. $x_n=a$, $c=b$ идти на шаг 5.

Шаг 4. $x_n=b$ $c=a$.

Шаг 5. Вычислить x_{n+1} и Δx_{n+1} по формулам (3.3) и (3.4).

Шаг 6. Если $\Delta x_{n+1} \leq \varepsilon$, то $\zeta = \Delta x_{n+1} \pm x_{n+1,}$ конец.

Шаг 7. $n=n+1$, идти на шаг 5.

Пример 1

Методом хорд вычислить корень уравнения $2x^3 + 3x^2 - 7x + 1 = 0$ с точностью до тысячных в узком смысле на отрезке [1; 2].

Решение. Уточнение корня необходимо производить до тех пор, пока не будет достигнута точность $\varepsilon=0{,}05$. Производная $f'(x) = 6x^2 + 6x - 7$ на рассматриваемом отрезке [1;2] положительна, причем $m_1 = \min_{[1,2]} |f'(x)| = 5$.

Вторая производная $f''(x) = 12x + 6$ тоже положительна на отрезке [1; 2]. Вычислим $f(1) = -1$; $f(2) = 15$. Очевидно, что начальное приближение $x_0 = 1$, а $c = 2$. Перейдем непосредственно к уточнению корня по формуле (3.3):

$$x_1 = 1 - \frac{-1}{-1-1{,}5}(1-2) = 1{,}06.$$

Оценим погрешность полученного приближенного значения по формуле (3.4), предварительно определив $f(x_1) = -0{,}67$.

$\Delta x_1 = 0{,}67 / 5 = 0{,}14$.

Поскольку требуемая точность еще не достигнута ($\Delta x_1 > \varepsilon$), продолжим вычисления, а весь процесс решения оформим в виде следующей таблицы:

Таблица.

n	x_n	$f(x_n)$	Δx_n
	1,06	-0,68	0,14
2	1,10	-0,41	0,09
3	1,12	-0,27	0,06
4	1,14	-0,12	0,03

Из таблицы видно, что погрешность метода $\Delta x_4 = 0{,}03$ меньше требуемой точности $\varepsilon = 0{,}05$.

Далее, поскольку все вычисления проводились с двумя знаками после запятой, то необходимо учесть погрешность округления, равную 0,005. Окончательный результат представляем в виде: $\zeta = 1{,}14 \pm 0{,}35$.

3.2.2 Метод касательных (Ньютона)

Рассмотрим еще один метод вычисления корня с заданной степенью точности – метод касательных (Ньютона). Будем предполагать, как и в методе хорд, что функция $f(x)$ на концах отрезка $[a,b]$ имеет разные по знаку значения; ее первая и вторая производные сохраняют свои знаки и не обращаются в ноль при $x \in [a,b]$. Определим $m_1 = \min\limits_{[a,b]} |f'(x)|$;

$M_2 = \max\limits_{[a,b]} |f''(x)|$. Приближенное значение x_{n+1} корня ξ вычисляется по формуле:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 0,1,2... \qquad (3.5)$$

В качестве начального приближения x_0 выбирается тот конец отрезка $[a,b]$ в котором функция $f(x)$ и ее вторая производная $f''(x)$ имеют одинаковые по знаку значения. Абсолютная погрешность полученного методом касательных приближения определяется по формуле:

$$\Delta x_{n+1} = \frac{M_2}{2m_1}(x_{n+1} - x_n)^2. \qquad (3.6)$$

Сформулируем алгоритм метода касательных (Ньютона).
Шаг 1. N =0.
Шаг 2. Если $f(a)f''(a)<0$, то идти на шаг 4.
Шаг 3. $x_n=a$, идти на шаг 5.
Шаг 4. $x_n=b$.
Шаг 5. Вычислить x_{n+1} и Δx_{n+1} по формулам (3.5) и (3.6).
Шаг 6. Если $\Delta x_{n+1} \le \varepsilon$, то $\zeta = \Delta x_{n+1} \pm x_{n+1,}$ конец.
Шаг 7. $n=n+1$, идти на шаг 5.

Пример 2

Отделить корни уравнения $x^3 - 0.2x^2 + 0.5x - 1.4 = 0$ аналитическим методом, уточнить корень методом касательных (Ньютона) с точностью 0,001.

Решение:

Найдем производную функции:

$f'(x) = 3x^2 - 0.4x + 0.5,$

$D = 0.4^2 - 4 \cdot 1.5 < 0.$

Составим таблицу знаков:

x	-∞	1	1.5	+∞
sign $f(x)$	-	-	+	+

Уравнение имеет действительный корень, лежащий в промежутке [1;1.5]. Приведем уравнение к виду $x = \varphi(x)$ так, чтобы $|\varphi'(x)| < 1$ при $1 \le x \le 1{,}5$.

Так как $f'(x) = 3x^2 - 0.4x + 0.5$, то

$$\varphi(x_n) = x_n - \frac{x_n^{\,3} - 0.2x_n^{\,2} + 0.5x_n - 1.4}{3x_n^{\,2} - 0.4x_n + 0.5}.$$

$$m_1 = \min_{[1,1.5]} |3x^2 - 0.4x + 0.5| = 6.65.$$

$$M_2 = \max_{[1,1.5]} |6x - 0.4| = 8.6.$$

Примем $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Вычисления представлены в таблице:

n	x	Δx
0	1,5	-
1	1,158	0,07568
2	1,044	0,00842
3	1,031	0,00010

Из таблицы видно, что погрешность метода Δx_3 = 0,0001 меньше требуемой точности ε =0,001.

Ответ: x= 1,03±0,0001.

3.2.3 Метод итераций

Один из наиболее важных методов уточнения корней является метод итераций. Для реализации этого метода необходимо уравнение (3.1) преобразовать в эквивалентное ему уравнение вида:

$$x=\varphi(x), \qquad (3.7)$$

и построить последовательность:

$$x_{n+1}=\varphi(x_n),\ n=0,1,\ldots \qquad (3.8)$$

При этом для обеспечения сходимости метода правая часть уравнения (3.7) должна удовлетворять условиям: $|\varphi'(x)| \le q < 1,$ $\varphi(x) \in [a,b]$при $x \in [a,b]\ u\ \ x_0 \in [a,b]$.

Абсолютная погрешность приближенного значения x_{n+1} определяется по формуле:

$$\Delta x_{n+1} = \frac{q}{1-q}|x_{n+1} - x_n|. \qquad (3.9)$$

Теперь сформулируем алгоритм метода итераций.

Шаг 1. Задать $x_0 \in [a,b]$.

Шаг 2. N=0.

Шаг 3. Вычислить x_{n+1} и Δx_{n+1} по формулам (3.8) и (3.9).

Шаг 4. Если $\Delta x_{n+1} \le \varepsilon$, то $\zeta = \Delta x_{n+1} \pm x_{n+1,}$ конец.

Шаг 5. n=n+1, идти на шаг 3.

Один из возможных примеров построения уравнения (3.7) это представление в виде:

$$\varphi(x_{n+1}) = x_n - \frac{f(x_n)}{k}. \qquad (3.10)$$

Здесь $к$ подбирается следующим образом: $|k| \ge \frac{Q}{2}$; а $Q = \max\limits_{[a,b]}|f'(x)|$, причем число k имеет тот же знак, что и $\max\limits_{[a,b]} f'(x)$.

Пример 3

Отделить корни уравнения $5x-8\ln x=8$ графическим методом, уточнить корень методом простой итерации с точностью 0,001.

Решение:

Для отделения корней представим уравнение в виде:

$$5x-8=8\cdot\ln x.$$

Тогда F_1 = 5x-8, F_2 = 8 ln$x$.

Построив графики функций F_1 и F_2, мы видим на рисунке 1, что решение уравнения (точка пересечения графиков) лежит в интервале $x\in[0.4;0.6]$.

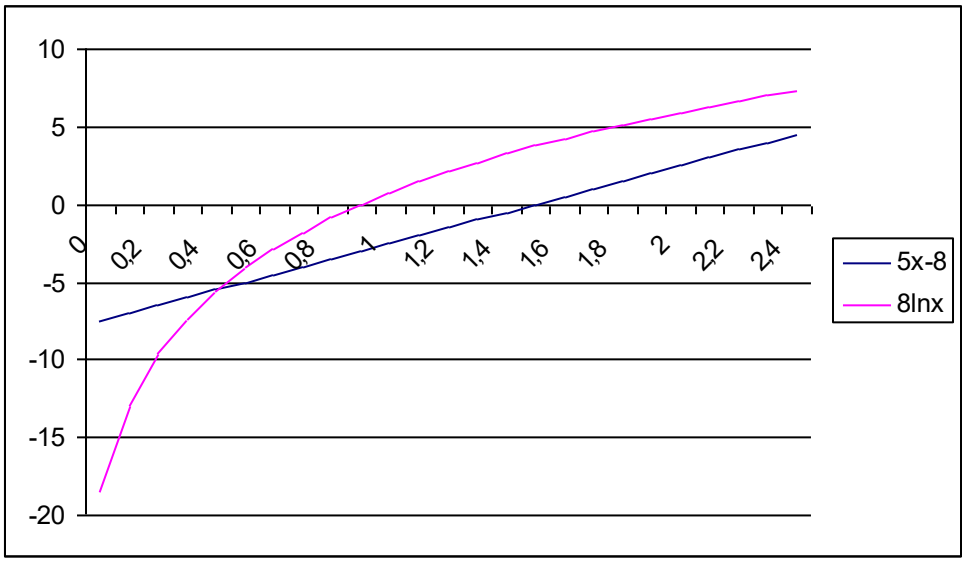


Рисунок 1 - Отделение корней уравнения $5x-8=8\cdot\ln x$

Для уточнения корня методом итераций приведем уравнение к виду:

$x=\varphi(x)$ где $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{k}$, $|k|\geq\dfrac{Q}{2}$; а $Q=\max|f'(x)|$, причем число k имеет тот же знак, что и $\max f'(x)$.

Находим:

$$f(x)=5x-8\ln x-8,$$

$$f'(x)=5-\frac{8}{x},$$

$$Q=\max|f'(0{,}4)|=|-15|=15,$$

$$|k|\geq\frac{15}{2}.$$

Примем $k=-8$, тогда

$$\varphi(x)=x+\frac{5x-8\ln x-8}{8},$$

$\varphi(x) = 1{,}625x - \ln x - 1$,

$\varphi'(x) = 1{,}625 - \frac{1}{x}$,

$\max\limits_{[0,4;0,6]} |\varphi'(x)| = 0{,}875$,

q=0,875.

Примем x_0 =0,4, а остальные значения будем находить, используя равенство:

$x_{n+1} = 1{,}625x_n - \ln x_n - 1$.

Вычисления представлены в таблице:

n	x	Δx
0	0,4	-
1	0,5663	1,1640
2	0,4889	0,5419
3	0,5101	0,1484
4	0,5021	0,0560
5	0,5049	0,0197
6	0,5039	0,0071
7	0,5042	0,0025
8	0,5041	0,0009

Ответ: x = 0,504±0,0009.

3.3 Индивидуальное задание №3

Задание: Отделите корни уравнений графическим или аналитическим методами, уточните корни: a) методом простой итерации; b) методом Ньютона; c) методом хорд.

Вариант №1

a) $\ln x - (x+1)^3 = 0$;

b) $x^3 + 2x^2 + 2 = 0$;

c) $2x^3 + x^2 + 3 = 0$;

Вариант №2

a) $x * 2^x = 1$;

b) $x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0$;

c) $2x^3 + 1{,}2x^2 + 3 = 0$;

Вариант №3

a) $\sqrt{x+1} = \frac{1}{x}$;

b) $x^3 + 2x + 4 = 0$;

c) $2x^3 + 1{,}3x^2 + 3 = 0$;

Вариант №4

a) $x - \cos x = 0$;

b) $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1{,}4 = 0$;

c) $2{,}3x^3 + x^2 + 3{,}1 = 0$;

Вариант №5
a) $3x+\cos x+1=0$;
b) $x^3-3x^2+6x-5=0$;
c) $2{,}5x^3+x^2+3=0$;

Вариант №6
a) $x+\ln x=0{,}5$;
b) $x^3-0{,}1x^2+0{,}4x+1{,}2=0$;
c) $5x^3+x^2+3=0$;

Вариант №7
a) $2-x=\ln x$;
b) $x^3-0.2x^2+0.5x-1=0$;
c) $2{,}2x^3+x^2+3{,}4=0$;

Вариант №8
a) $(x-1)^2=\frac{1}{2}e^x$;
b) $x^3+3x^2+12x+3=0$;
c) $2x^3+2{,}5x^2+3=0$;

Вариант №9
a) $(2-x)e^x=0{,}5$;
b) $x^3-0{,}1x^2+0{,}4x+2=0$;
c) $2{,}4x^3+x^2+3=0$;

Вариант №10
a) $2{,}2x-2^x=0$;
b) $x^3-0{,}2x^2+0{,}4x-1{,}4=0$;
c) $2x^3+1{,}4x^2+3=0$;

Вариант №11
a) $x^2+4\sin x=0$;
b) $x^3+0{,}4x^2+0{,}6x-1{,}6=0$;
c) $2{,}4x^3+x^2+3=0$;

Вариант №12
a) $2x-\lg x=7$;
b) $x^3+x-3=0$;
c) $2x^3+0{,}6x^2+3=0$;

Вариант №13
a) $x^2=\ln(x+1)$;
b) $x^3+0{,}2x^2+0{,}5x+0{,}8=0$;
c) $2{,}3x^3+x^2+3=0$;

Вариант №14
a) $3x-e^x=0$;
b) $x^3+4x-6=0$;
c) $2x^3+x^2+3{,}5=0$;

Вариант №15
a) $x(x+1)^2=1$;
b) $x^3+0{,}1x^2+0{,}4x-1{,}2=0$;
c) $2{,}3x^3+x^2+3{,}1=0$;

Вариант №16
a) $x=(x+1)^3$;
b) $x^3+3x^2+6x-1=0$;
c) $x^3+4{,}2x^2+3=0$;

Вариант №17
a) $x^2=\sin x$;
b) $x^3-0{,}1x^2+0{,}4x-1{,}5=0$;
c) $2{,}4x^3+x^2+3=0$;

Вариант №18
a) $x^3=\sin x$;
b) $x^3-3x^2+6x-2=0$;
c) $2x^3+1{,}5x^2+3=0$;

Вариант №19
a) $x=\sqrt{\lg(x+2)}$;
b) $x^3-0{,}2x^2+0{,}3x-1{,}2=0$;

Вариант №20
a) $x^2=\ln(x+1)$;
b) $x^3-3x^2+12x-9=0$;

c) $x^3 + 2x^2 + 3 = 0$;

c) $x^3 + 1{,}1x^2 + 3 = 0$;

Вариант №21

a) $2x + \lg x = -0{,}5$;

b) $x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 2 = 0$;

c) $2x^3 + 1{,}3x^2 + 3 = 0$;

Вариант №22

a) $2x + \cos x = 0{,}5$;

b) $x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}3x - 0{,}6 = 0$;

$x^3 - 0.1x^2 + 0.3x - 0.6 = 0$c)

$2x^3 + 4x^2 + 3 = 0$;

Вариант №23

a) $\sin 0{,}5x + 1 = x^2;\ x > 0$;

b) $x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0$;

c) $2x^3 + x^2 + 3{,}1 = 0$;

Вариант №24

a) $0{,}5x + \lg(x - 1) = 0{,}5$;

b) $x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}5 = 0$;

c) $2x^3 + x^2 + 3{,}1 = 0$;

Вариант №25

a) $\sin(0.5 + x) = 2x - 0{,}5$;

b) $x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0$;

c) $x^3 + 2{,}1x^2 + 3 = 0$;

Вариант №26

a) $\lg(2 + x) + 2x = 3$;

b) $x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1{,}2 = 0$;

c) $2{,}2x^3 + 1{,}4x^2 + 3 = 0$;

Вариант №27

a) $\lg(1 + 2x) = 2 - x$;

b) $x^3 + 3x + 1 = 0$;

c) $x^3 + 1{,}5x^2 + 3 = 0$;

Вариант №28

a) $2\sin(x - 0{,}6) = 1{,}5 - x$;

b) $x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}3x - 0{,}6 = 0$;

c) $2x^3 + 1{,}4x^2 + 3 = 0$;

Вариант №29

a) $x + \lg(1 + x) = 1{,}5$;

b) $x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0$;

c) $2x^3 + x^2 + 3{,}2 = 0$;

Вариант №30

a) $x + \cos x = 1$;

b) $x^3 + 3x + 1 = 0$;

c) $2x^3 + 1{,}5x^2 + 3 = 0$;

4 ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

4.1 Интерполирование функции

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, непрерывную на интервале $[a,b]$. Заданы значения $y_i=f(x_i)$ в узлах x_i, $i=0,1,\ldots n$. Необходимо найти значение этой функции в точках x^* принадлежащих интервалу $[a,b]$, $x^*\neq x_i$ оценить погрешность полученного измерения.

Часто приближающую функцию задают в форме:

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i(x)$$

где $\{\varphi_i\}$ система функций заданных на $[a,b]$ и являющимися гладкими, a_i – коэффициенты которые подбирают так, чтобы отклонение $\varphi(x)$ от $f(x)$ было минимальным. Полином $P(x)$ называется аппроксимирующим или приближающим (от слова approxio – приближать). Одна из возможностей решения поставленной задачи заключается в построении для функции $f(x)$ по значениям y_i в узлах x_i многочлена степени не выше n, принимающего в точках x_i значения y_i:

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n\ . \qquad (4.1)$$

Значения коэффициентов многочлена- a_i- находятся из условия:

$$P_n(x_i)=y_i\text{, i=0, 1, …, n.} \qquad (4.2)$$

Этот многочлен называется интерполяционным. Такой способ приближения интерполяцией. Функция $f(x)$ представляется в виде:

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x), \qquad (4.3)$$

где $R_n(x)$ − остаточный член интерполяционной формулы. Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную порядка $(n+1)$ на $[a,b]$, то

$$R_n(x)=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n),\ \xi\in(a,b) \qquad (4.4)$$

.

Оценивается погрешность метода по остаточному члену интерполяционной формулы:

$$R_n(x^*)\le\Delta_1=\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|(x^*-x_0)(x^*-x_1)\ldots(x^*-x_n)\right|,$$

где $M_{n+1}=\max\limits_{[x_0,x_n]}\left|f^{n+1}(x)\right|$.

Погрешность вычисления по погрешностям приближенных значений исходных данных:

$$\Delta_2 \geq \left| P_n(x^*) - \overline{P}_n(x^*) \right|.$$

Таким образом, полная погрешность приближенного значения есть

$$\Delta \geq \Delta_1 + \Delta_2 \geq \left| f(x^*) - \overline{P}_n(x^*) \right|.$$

Для достаточно гладких функций и достаточного количества узлов на интервале интерполирования погрешность метода будет достаточно мала. При достаточной точности исходных значений и достаточной точности вычислений вычислительная погрешность будет небольшой.

При решении практических задач интерполяционный многочлен строят в различных формах.

Одна из таких форм: формула Ньютона для интерполирования «вперед» 3-го порядка, пусть точка расположена вблизи первого узла интерполирования, тогда:

$$\begin{aligned} &y(x) \approx y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 \\ &q = (x - x_0)/h, \end{aligned} \qquad (4.5)$$

где а x_0 ближайший к x узел слева.

Оценки погрешности приближенного значения $y(x)$ могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} &\Delta_1 = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} \left| q^*(q-1)...(q^*-n) \right| \approx \frac{\max\limits_{[a,b]} \left| \Delta^{n+1} y_i \right|}{(n+1)!} \left| q^*(q^*-1)...(q^*-n) \right|, \\ &\Delta_2 = \Delta^*(1 + 2\left|q^*\right| + 2\left|q^*(q^*-1)\right| + ... + 2^n \frac{\left|q^*(q^*-1)...(q^*-n)\right|}{n!}). \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Если точка интерполирования расположена вблизи последнего узла сетки, то используют второй интерполяционный полином Ньютона (формула «назад»).

Формула Ньютона для интерполирования «назад» 3-го порядка:

$$\begin{aligned} &y(x) \approx y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} \\ &q = (x - x_n)/h. \end{aligned} \qquad (4.7)$$

где а x_n ближайший к x узел справа.

Оценки погрешности приближенного значения $y(x)$ могут быть представлены в виде:

$$\Delta_1 = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} \left| q*(q+1)...(q*+n) \right| \approx \frac{\max\limits_{[a,b]} \left| \Delta^{n+1} y_i \right|}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^{n} (q*+i) \right|, \quad (4.8)$$

$$\Delta_2 = \Delta * (1 + 2\left|q*\right| + 2\left|q*(q*+1)\right| + ... + 2^n \frac{\left|q*(q*+1)...(q*+n-1)\right|}{n!}).$$

Интерполяционные формулы Ньютона удобнее применять в том случае, когда интерполируется одна и та же функция $f(x)$, но число узлов постепенно увеличивается. Если узлы интерполяции фиксированы и интерполируется не одна, а несколько функций, то удобнее пользоваться формулой Лагранжа.

Формула Лагранжа для неравноотстоящих узлов:

$$f(x) \approx \Pi_{n+1} * \sum_{i=0}^{n} (y_i / D_i),$$

$$\text{где} \quad \Pi_{n+1} = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n),$$

$$D_1 = (x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x - x_1)(x_i - x_{i+1})...(x - x_n). \quad (4.9)$$

Остаточная погрешность значения $f(x)$ вычисленного по формуле (4.9) оценивается формулой:

$$R_n(x^*) \le \Delta_1 = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| (x^* - x_0)(x^* - x_1)...(x^* - x_n) \right| . \quad (4.10)$$

Вычислительная погрешность:

$$\Delta_2 = \sum_{i=0}^{n} \left| \frac{(x*-x_0)(x*-x_1)...(x*-x_{i-1})(x*-x_{i+1})...(x*-x_n)}{(x_i - x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n} \right| \Delta y_i, \quad (4.11)$$

где Δy_i – погрешность исходных данных (значений функции в узлах).

Формула Лагранжа для равноотстоящих узлов:

$$f(x) = y(x) \approx \Pi_{n+1}(t) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{(t-i)C_i},$$

$$\text{где} \quad \Pi_{n+1}(t) = t(t-1)...(t-n); \quad t = (x - x_0)/h; \quad h = x_{i+1} - x_i; \quad (4.12)$$

$$C_i = (-1)^{n-1} * i!*(n-i)!.$$

Пример 1

Используя интерполяционные формулы Ньютона, вычислить значения функции при заданных значениях аргумента, оценить погрешности, если заданные значения функции имеют четыре верных знака в широком смысле.

x	y
1,215	0,1060
1,22	0,1132
1,225	0,1196
1,23	0,1253
1,235	0,1303
1,24	0,1347
1,245	0,1387
1,25	0,1423
1,255	0,1456
1,26	0,1488

Решение:

Значения аргумента: 1) x_1=1,227; 2) x_2=1,253.

Составим таблицу конечных разностей. При составлении таблицы разностей ограничимся разностями третьего порядка, так как они практически постоянны. Для вычисления значений функции при x=1,227 воспользуемся формулой Ньютона для интерполирования «вперед», так как эта точка находится ближе к началу рассматриваемого интервала.

x	y	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
1,215	0,106	0,0072	-0,0008	1E-04	-1E-04
1,22	0,1132	0,0064	-0,0007	0	1E-04
1,225	0,1196	0,0057	-0,0007	1E-04	0,0001
1,23	0,1253	0,005	-0,0006	2E-04	-2E-04
1,235	0,1303	0,0044	-0,0004	0	1E-04
1,24	0,1347	0,004	-0,0004	1E-04	0,0001
1,245	0,1387	0,0036	-0,0003	2E-04	
1,25	0,1423	0,0033	-0,0001		
1,255	0,1456	0,0032			
1,26	0,1488				

=0,1132-0,106

=0,0057-0,0064

Если x=1,227, то возьмем x_0=1,225; тогда q=0,4.

y(1,227)≈0,1196+0,4*0,0057+(0,4*(0,4-1))*(-0,007)/(1*2)+(0,4*(0,4-1)*(0,4-2)* 1E-04/(1*2*3)=0,1219704;

Найдем погрешность метода:

Δ_1=0,0001*ABS((0,4*(0,4-1)*(0,4-2)*(0,4-3)))/24=4,16E-06;

Найдем погрешность вычисления:

Если все исходные значения y_i заданы с одной и той же погрешностью Δ^*, эта погрешность распространяется на разности порядка m с коэффициентом 2^m .

$\Delta^*(y_i)$=0,001; $\Delta^*(\Delta y_i)$=0,002; $\Delta^*(\Delta^2 y_i)$=0,004; $\Delta^*(\Delta^3 y_i)$=0,008.

Δ_2=0,001+0,002*0,4+(0,004*0,4*0,6)/2!+ (0,008*0,4*0,6*1,6)/3!=0,0028.

Округлим до четырех знаков после запятой y(1,227)≈0,1220.

Суммируем погрешности и получаем следующий результат:

y(1,227)=0,1220±0,0028.

Для вычислений значения функции при x=1,253 воспользуемся формулой Ньютона для интерполирования «назад», так как для соответствующей x=1,253 ближайшей строки в таблице существуют не все разности: примем x_0=1,255; тогда q=-0,4,

y(1.253)≈0,1456+(-0,4)*0,0033+(-0,4)*(-0,4+1)*(-0,0003)/(1*2)+(-0,4)*(-0,4+1)*(-0,4+2)*(1E-04)/(1*2*3)=0,1443096.

Найдем погрешность метода:

Δ_1=(1E-04)*ABS((-0,4*(0,4+1)*(-0,4+2)*(-0,4+3)))/24=4,16E-06;

Найдем погрешность вычисления:

Δ2=0,001+0,002*(-0,4)+(0,004*(-0,4)*0,6)/2!+(0,008*(-0,4)*0,6*1,6)/3!=-0,00079.

Округлим до четырех знаков после запятой y(1,253)≈0,1443.

Суммируем погрешности и получаем следующий результат:

y(1,253)=0,1443±0,0008.

Пример 2

Найти приближенное значение функции при заданном значении аргумента с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа, если функция задана:

1) в неравноотстоящих узлах таблицы:

x	y
0,05	0,050042
0,10	0,100335
0,17	0,171657
0,25	0,255342
0,30	0,309336
0,36	0,376403

2) в равноотстоящих узлах таблицы:

x	y
0,101	1,26183
0,106	1,27644
0,111	1,29122
0,116	1,30617
0,121	1,3213
0,126	1,3266

Решение:

1) Значение аргумента x=0,263.

Воспользуемся формулой:

$$f(x) \approx \Pi_{n+1} * \sum_{i=0}^{n} (y_i / D_i),$$

где $\Pi_{n+1} = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n),$

$$Di = (x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x - x_1)(x_i - x_{i+1})...(x - x_n).$$

Вычисления приведены в таблице:

i	x_i	y_i	Разности						D_i	y_i/D_i
			$x_i - x_0$	$x_i - x_1$	$x_i - x_2$	$x_i - x_3$	$x_i - x_4$	$x_i - x_5$		
0	0,05	0,050042	0,213	-0,05	-0,12	-0,2	-0,25	-0,31	-1,98E-05	-2526,2
1	0,1	0,100335	0,05	0,163	-0,07	-0,15	-0,2	-0,26	4,45E-06	22547,7
2	0,17	0,171657	0,12	0,07	0,093	-0,08	-0,13	-0,19	-1,54E-06	-111202
3	0,25	0,255342	0,2	0,15	0,08	0,013	-0,05	-0,11	1,72E-07	1488007
4	0,3	0,309336	0,25	0,2	0,13	0,05	-0,037	-0,06	7,22E-07	428740
5	0,36	0,376403	0,31	0,26	0,19	0,11	0,06	-0,097	-9,80E-06	-38392,7

Для того чтобы подсчитать D_i находим значения разностей $(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x - x_0)(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)$, то есть в таблице диагональные элементы отмеченные заливкой находим как $(x - x_0)$.

Например для i=3:

0,25—0,05=0,2;

0,25-0,1=0,15;

0,25-0,17=0,08;

0,263-0,25=0,013;

0,25-0,3=-0,05;

0,25-0,36=-0,11.

Далее перемножаем найденные разности по строкам i, и получаем значение D_i.

Находим y_i/D_i поделив соответствующее значение функции на D_i,, например для i=2:

0,171657/-1,54E-06=-111202.

Далее находим $\sum_{i=0}^{n} (y_i / D_i)$:

-2526,2+22547,7-111202+1488007+428740-38392,7=1787173,8.

Для нахождения значения функции в точке x=0,263 необходимо найти $\Pi_{n+1} = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$, а это не что иное, как произведение элементов диагонали:

0,213*0,163*0,093*0,013*(-0,037)*(-0,097)=1,50649E-07.

$$f(0{,}263) \approx \Pi_{n+1} * \sum_{i=0}^{n} (y_i / D_i) = 1{,}50649E - 0{,}7 * 1787173{,}8 = 0{,}269236.$$

2) Значение аргумента x=0,1157.

Для вычислений используем формулу:

$$f(x) = y(x) \approx \Pi_{n+1}(t) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{(t-i)C_i},$$

$$\text{где} \quad \Pi_{n+1}(t) = t(t-1)...(t-n); \quad t = (x - x_0)/h; \quad h = x_{i+1} - x_i;$$

$$C_i = (-1)^{n-1} * i! * (n-i)!.$$

Здесь t=(0,1157-0,101)/0,005=2,94.

Вычисления располагаем в таблице:

i	x	y	$t-i$	C_i	$(t-i)*C_i$	$Y_i/(t-i)*C_i$
0	0,101	1,26183	2,94	-120	-352,8	-0,003576616
1	0,106	1,27644	1,94	24	46,56	0,027414948
2	0,111	1,29122	0,94	-12	-11,28	-0,114469858
3	0,116	1,30617	-0,06	12	-0,72	-1,814125
4	0,121	1,3213	-1,06	-24	25,44	0,051937893
5	0,126	1,3266	-2,06	120	-247,2	-0,005366505
		Π_{5+1}(t)=	-0,70243			-1,858185137
		f(0,1157)=(-0,70243)*(-1,858185137)=				1,305239571

Например для i=3:

t-i=2,94-3=-0,06;

C_i=(-1)$^{5-3}$*3!*(5-3)!=(-1)^2*(1*2*3)*(1*2)=12;

(t-i)*C_i=-0.06*12=-0.72;

y_i/(t-i)*C_i=1.30617/(-0.72)= -1,814125.

Вычислим Π_{n+1}(t):

$$\Pi_{n+1}(t) = t(t-1)...(t-n) = 2{,}94 * 1{,}94 * 0{,}94 * (-1{,}06) * (-1{,}06) * (-2{,}06) = -0{,}70243.$$

Найдем $\sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{(t-i)C_i}$:

$$\sum_{i=0}^{5} \frac{y_i}{(t-i)C_i} = \text{-}0{,}003576616 + ... + (\text{-}0{,}005366505) = \text{-}1{,}858185137.$$

Получим окончательный результат $f(x) = y(x) \approx \Pi_{n+1}(t) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{(t-i)C_i}$:

f(0,1157)= -0,70243*(-1,858185137)=1,305239571≈1,30524.

4.2 Среднеквадратичное приближение функции

Среднеквадратичное приближение - это способ аппроксимации, при котором критерий близости исходной функции $y=f(x)$ и аппроксимирующей ее функции $\varphi(x)$ определяется как сумма квадратов отклонений $f(x)$ от $\varphi(x)$ на заданной системе точек и ищется такая функция $\varphi(x)$, для которой эта сумма будет минимальна (метод наименьших квадратов). В качестве аппроксимирующей функции берется известная функция $\varphi(x, a_0, a_1, \ldots, a_m)$, зависящая от значений параметров a_i.

Пусть функция $y=f(x)$ задана таблично, то есть задано дискретное множество аргументов $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ и соответствующее множество значений функции $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$. требуется подобрать такие значения параметров $a_0, a_1, \ldots, a_m$, при которых сумма квадратов отклонений функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ при всех значениях x_i : $(i=0,1,\ldots,n)$

$$S = \sum_{i=0}^{n} \eta_i^{\,2} = \sum_{i=0}^{n} [\varphi(x_i; a_0, a_1, ..., a_m) - y_i]^2 \qquad (4.13)$$

будет минимальна. Поскольку значения аргументов x_i заданы, функция S будет зависеть только от параметров:

$$S=S(a_0, a_1, \ldots, a_m)$$

и задача сводится к нахождению минимума функции S. Для этого надо найти частные производные этой функции по всем переменным a_i и приравнять их нулю:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \ \ldots \ , \quad \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0.$$

Это выражение представляет собой систему $m+1$ уравнений для определения $m+1$ неизвестного параметра $a_0, a_1, \ldots, a_m$.

Если в качестве аппроксимирующей функции выбран квадратный многочлен: $\varphi(x)= a_0 + a_1x + a_2x^2$, в котором зависимость от коэффициентов a_0, a_1, a_2 является линейной, то этом случае выражение примет вид:

$$S = \sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)^2 = S(a_0, a_1, a_2). \qquad (4.14)$$

Найдем частные производные и приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)x_i = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = 2\sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)x_i^2 = 0.$$

Раскрывая скобки и собирая коэффициенты при неизвестных получим систему трех линейных уравнений для неизвестных a_0, a_1, a_2:

$$\begin{cases} a_0(n+1) + a_1\sum_{i=0}^{n} x_i + a_2\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} y_i; \\ a_0\sum_{i=0}^{n} x_i + a_1\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + a_2\sum_{i=0}^{n} x_i^3 = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i; \\ a_0\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + a_1\sum_{i=0}^{n} x_i^3 + a_2\sum_{i=0}^{n} x_i^4 = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 y_i; \end{cases} \qquad (4.15)$$

Пример 3

Аппроксимировать функцию многочленом второй степени с помощью метода наименьших квадратов.

x	0,15	0,155	0,16	0,165	0,17	0,175
y	6,6166	6,3999	6,1966	6,0055	5,8256	5,6558

Решение: m=2, n=5

Найдем квадратичный трехчлен вида $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$\sum_{i=0}^{5} x_i = 0{,}150 + 0{,}155 + 0{,}160 + 0{,}165 + 0{,}170 + 0{,}175 = 0{,}9750;$$

$$\sum_{i=0}^{5} x_i^{\,2} = 0{,}150^2 + 0{,}155^2 + 0{,}160^2 + 0{,}165^2 + 0{,}170^2 + 0{,}175^2 = 0{,}15887;$$

$$\sum_{i=0}^{5} x_i^{\,3} = 0{,}150^3 + 0{,}155^3 + 0{,}160^3 + 0{,}165^3 + 0{,}170^3 + 0{,}175^3 = 0{,}02596;$$

$$\sum_{i=0}^{5} x_i^{\,4} = 0{,}150^4 + 0{,}155^4 + 0{,}160^4 + 0{,}165^4 + 0{,}170^4 + 0{,}175^4 = 0{,}00425;$$

$$\sum_{i=0}^{5} y_i = 6{,}61659 + 6{,}39989 + 6{,}19658 + 6{,}00551 + 5{,}82558 + 5{,}65583 = 36{,}69998;$$

$$\sum_{i=0}^{5} x_i y_i = 0{,}150 \cdot 6{,}61659 + 0{,}155 \cdot 6{,}9989 + 0{,}160 \cdot 6{,}19658 + 0{,}165 \cdot 6{,}00551 +$$

$$+ 0{,}170 \cdot 5{,}82558 + 0{,}175 \cdot 5{,}65583 = 5{,}94695;$$

$$\sum_{i=0}^{6} x_i^{\,2} y_i = 0{,}150^2 \cdot 6{,}61659 + 0{,}155^2 \cdot 6{,}39989 + 0{,}160^2 \cdot 6{,}19658 +$$

$$+ 0{,}165^2 \cdot 6{,}00551 + 0{,}170^2 \cdot 5{,}82558 + 0{,}175^2 \cdot 5{,}65583 = 0{,}96633;$$

Составим систему:

$$\begin{cases} a_0(n+1) + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^{\,2} = \sum_{i=0}^{n} y_i; \\ a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^{\,2} + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^{\,3} = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i; \\ a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i^{\,2} + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^{\,3} + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^{\,4} = \sum_{i=0}^{n} x_i^{\,2} y_i; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6a_0 + 0{,}9750a_1 + 0{,}15887a_2 = 36{,}69998; \\ 0{,}975a_0 + 0{,}15887a_1 + 0{,}02596a_2 = 5{,}94695; \\ 0{,}15887a_0 + 0{,}02596a_1 + 0{,}00425a_2 = 0{,}96633; \end{cases}$$

Решим систему линейных уравнений методом Гаусса:

шаг 1

коэффициенты при неизвестном			правая часть	контрольная сумма	строчная сумма
6	0,9750	0,15887	36,69998	43,83377	43,83377
0,975	0,15887	0,02596	5,94695	7,10678	7,10678
0,15888	0,02596	0,00425	0,96633	1,15542	1,15542

шаг 2

коэффициенты при неизвестном			правая часть	контрольная сумма	строчная сумма
1,00000	0,16250	0,02648	6,11665	7,30563	7,30563
	0,00043	0,00014	-0,01678	-0,01621	-0,01621
	0,00014	0,00005	-0,00545	-0,00526	-0,00526

Шаг 3

коэффициенты при неизвестном			правая часть	контрольная сумма	строчная сумма
1,00000	0,16250	0,02648	6,11665	7,30563	7,30563
	1,00000	0,32977	-38,80173	-37,47197	-37,47197
		0,00000	0,00005	0,00005	0,00005

шаг 4

коэффициенты при неизвестном			правая часть	контрольная сумма	строчная сумма
1,00000	0,16250	0,02648	6,11665	7,30563	7,30563
	1,00000	0,32977	-38,80173	-37,47197	-37,47197
		1,00000	-101,46459	-100,46459	-100,46459

$a_2 =$	-101,46459
$a_1 =$	-5,34188
$a_0 =$	9,67132

Полученный многочлен: $y = 9{,}67132 - 5{,}34188x - 101{,}46459x^2 = \varphi(x)$

Оценим относительные погрешности полученной аппроксимации в заданных точках:

$$\nu y_i = \frac{\varepsilon_i}{y_i} = \frac{\varphi(x_i) - y_i}{y_i}$$

x_i	y_i	$\varphi(x_i)$	ε_i	νy_i
0,15	6,61659	6,58708473	-0,0295	-0,0045
0,155	6,39989	6,40564183	0,00575	0,0009
0,16	6,19658	6,2191257	0,02255	0,00364
0,165	6,00551	6,02753634	0,02203	0,00367
0,17	5,82558	5,83087375	2,93647	0,50406
0,175	5,65583	5,62913793	-0,0267	-0,0047

График полученной функции представлен на рисунке 2.

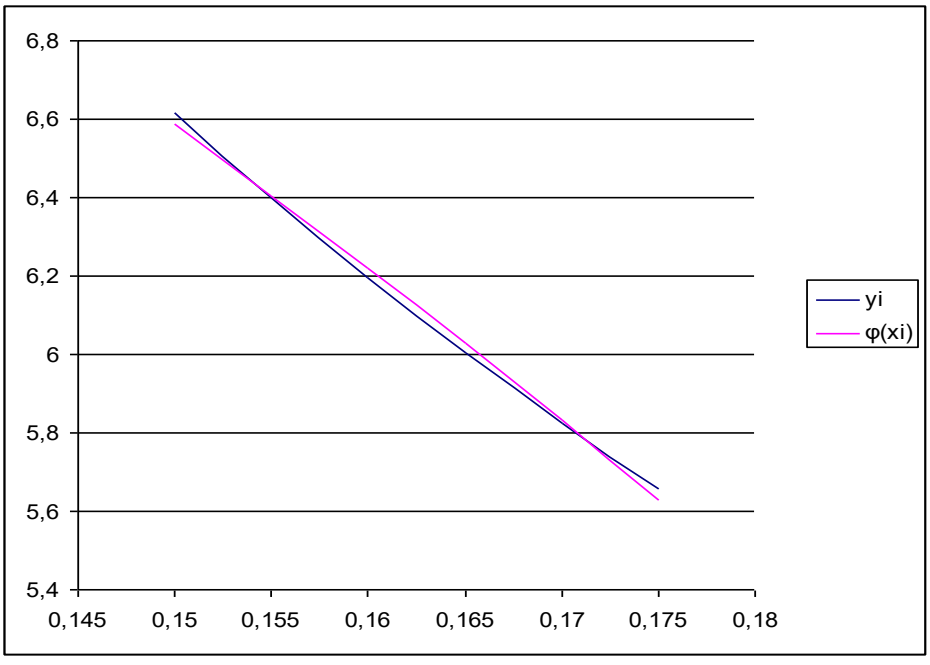


Рисунок 2 – График функции

4.3 Приближение сплайнами

Сплайном называют кусочно-полиномиальную функцию, склеенную из различных многочленов, непрерывную на всем отрезке $[a,b]$ вместе со своими несколькими производными. При решении используют приближение линейными, параболическими и кубическими сплайнами.

Линейные сплайны. Линейные сплайны представляют собой ломаную линию. Пусть интерполируемая функция задана своими значениями y_i в узлах x_i, i=0,…,n. Для каждого интервала $[x_i, x_{i+1}]$ функция $f(x)$ заменяется линейной функцией:

$S_i(x)=a_i+b_i(x-x_i)$,

где $x_i<x<x_{i+1}$, i=0,…,n-1.

Коэффициенты сплайна a_i, b_i находятся из следующих условий:

1. В узлах сетки значения функции $f(x_i)=y_i$ должны совпадать со значениями сплайна, то есть $S_i(x_i)=y_i$.
2. В узлах сетки сплайн должен быть непрерывным, то есть $S_i(x_{i+1})=S_{i+1}(x_{i+1})$.

Из первого условия $a_i= y_i$.

Из второго условия $b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$, i=0,…, n-1, $h_i=x_{i+1}-x_i$.

Параболические сплайны. На каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$ функция $f(x)$ интерполируется квадратичной функцией вида:

$S_i(x)=a_i+b_i(x-x_i)+c_i(x-x_i)^2$.

Здесь мы имеем $3n$ коэффициентов (a_i, b_i , c_i), i=0,…,n-1, они находятся из следующих условий:

1. В узлах сетки значения функции $f(x_i)=y_i$ должны совпадать со значениями сплайна, то есть $S_i(x_i)=y_i$.
2. В узлах сетки сплайн должен быть непрерывным, то есть $S_i(x_{i+1})=S_{i+1}(x_{i+1})$.
3. В узлах сетки первая производная должна быть непрерывна $S'_i(x_{i+1})=S'_{i+1}(x_{i+1})$.

Из первого условия $a_i= y_i$, i=0,…,n.

Из третьего условия $c_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{h_i}$, i=0,…,n-1, $h_i=x_{i+1}-x_i$.

Из третьего и второго условия $\frac{2}{h_i}(y_{i+1} - y_i) = b_i + b_{i+1}$, i=0,…,n-1. Имеем n уравнений для нахождения n+1 неизвестных b_0,…,b_n. Поэтому надо задать граничное условие $b_0=A_0$, $b_n=A_n$, где A_0, A_n – значения первой производной $f'(x)$ в точках $x=x_0$, $x=x_n$.

Кубические сплайны. На каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$ функция $f(x)$ интерполируется кубической функцией вида:

$S_i(x)=a_i+b_i(x-x_i)+c_i(x-x_i)^2+d_i(x-x_i)^3$,

где a_i, b_i, c_i, d_i - коэффициенты сплайна, которые нужно определить. Они находятся из следующих условий:

1. В узлах сетки значения функции $f(x_i)=y_i$ должны совпадать со значениями сплайна, то есть $S_i(x_i)=y_i$.
2. В узлах сетки сплайн должен быть непрерывным, то есть $S_i(x_i)=S_{i+1}(x_i)$.
3. В узлах сетки первая производная должна быть непрерывна $S'_i(x_{i+1})=S'_{i+1}(x_{i+1})$.
4. В узлах сетки вторая производная должна быть непрерывна $S''_i(x_{i+1})=S''_{i+1}(x_{i+1})$.

Из первого условия получаем $a_i=y_i$, $i=0,\ldots,n$.

Из четвертого условия получаем $d_i=\dfrac{m_{i+1}-m_i}{6h_i}$, $2c_{i+1}=m_{i+1}$.

Из третьего условия - $b_i=b_{i-1}+\dfrac{1}{2}h_{i-1}(m_i+m_{i-1})$.

Из второго условия получаем:

$$\frac{h_{i-1}}{6}m_{i-1}+\frac{h_{i-1}+h_i}{3}m_i+\frac{h_i}{6}m_{i+1}=\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}},\ i=1,\ldots,n-1.$$

Эта система состоит из (n-1) уравнений с (n+1) неизвестными, поэтому нужно задать граничные условия $m_0=B_0$, $m_n=B_n$.

4.4 Индивидуальное задание №4.1

Задание: Используя интерполяционные формулы Ньютона, вычислить значения функции при заданных значениях аргумента, оценить погрешности, заданные значения функции имеют четыре верных знака в широком смысле.

x	y
1,42	0,8885
1,42	0,8895
1,43	0,8906
1,43	0,8916
1,44	0,8927
1,44	0,8937
1,45	0,8947
1,45	0,8958
1,46	0,8968
1,46	0,8979
1,47	0,8989

№	Значения аргумента			
варианта	$x1$	$x2$	$x3$	$x4$
1	1,4145	1,4287	1,4482	1,4576
11	1,4159	1,4289	1,4488	1,4586
21	1,4173	1,4291	1,4494	1,4596

x	*y*
0,101	1,2618
0,106	1,2764
0,111	1,2912
0,116	1,3061
0,121	1,3213
0,126	1,3366
0,131	1,3512
0,136	1,3662
0,141	1,3811
0,146	1,3961
0,151	1,4110

№	Значения аргумента			
варианта	*x*1	*x*2	*x*3	*x*4
2	0,1026	0,144	0,099	0,161
12	0,1035	1,1492	0,096	0,153
22	0,1074	0,1485	0,1006	0,156

x	*y*
0,15	0,8607
0,20	0,8187
0,25	0,7788
0,30	0,7408
0,35	0,7046
0,40	0,6703
0,45	0,6376
0,50	0,5959
0,55	0,5587
0,60	0,5216
0,65	0,4844

№	Значения аргумента			
варианта	*x*1	*x*2	*x*3	*x*4
3	0,1511	0,725	0,143	0,8
13	0,1535	0,7333	0,1	0,754
23	0,1525	0,6732	0,1455	0,85

x	*y*
0,180	5,6154
0,185	5,4669
0,190	5,4326
0,195	5,1930
0,200	5,0664
0,205	4,9461
0,210	4,8080
0,215	4,6713
0,220	4,5345
0,225	4,3977
0,230	4,2609
0,235	4,1242

№	Значения аргумента			
варианта	*x*1	*x*2	*x*3	*x*4
4	0,1817	0,2275	0,175	0,2375
14	0,1827	0,2292	0,1776	0,24
24	0,1873	0,2326	0,1783	0,245

x	*y*
3,50	33,1154
3,55	34,8133
3,60	36,5982
3,65	38,4747
3,70	40,4473
3,75	42,5211
3,80	44,2424
3,85	46,1226
3,90	49,4024
3,95	52,6822
4,00	55,9621
4,05	59,2419
4,10	66,6863

№	Значения аргумента			
варианта	*x*1	*x*2	*x*3	*x*4
5	3,522	4,176	3,475	4,253
15	3,543	4,184	3,488	4,32
25	3,575	4,142	3,456	4,204

x	*y*
0,115	8,6572
0,120	8,2932
0,125	7,9582
0,130	7,6489
0,135	7,3623
0,140	7,0961
0,145	6,8481
0,150	6,6165
0,155	6,1965
0,160	5,9381
0,165	5,6440
0,170	5,3499
0,175	5,0558

№	Значения аргумента			
варианта	*x*1	*x*2	*x*3	*x*4
6	0,1217	0,1736	0,1141	0,185
16	0,1168	0,1745	0,11	0,1825
26	0,1175	0,1773	0,1134	0,19

x	*y*
1,340	4,2556
1,345	4,3532
1,350	4,4552
1,355	4,5618
1,360	4,6734
1,365	4,7903
1,370	4,9130
1,375	5,0419
1,380	5,1774
1,385	5,2661
1,390	5,3811

№	Значения аргумента			
варианта	*x*1	*x*2	*x*3	*x*4
7	1,3617	1,3921	1,3359	1,4
17	1,3463	1,3868	1,335	1,399
27	1,3432	1,3936	1,3365	1,3975

x	*y*
0,01	0,9918
0,06	0,9519
0,11	0,9136
0,16	0,8769
0,21	0,8416
0,26	0,8077
0,31	0,7753
0,36	0,7441
0,41	0,7141
0,46	0,6854
0,51	0,6579
0,56	0,6146

№	Значения аргумента			
варианта	*x*1	*x*2	*x*3	*x*4
8	0,027	0,525	0,008	0,61
18	0,1243	0,492	0,0094	0,66
28	0,083	0,5454	0,0075	0,576

x	*y*
0,15	4,4817
0,16	4,9530
0,17	5,4736
0,18	6,0496
0,19	6,6859
0,20	7,3891
0,21	8,1662
0,22	9,0230
0,23	9,9743
0,24	11,0203
0,25	12,1825
0,26	13,4637

№	Значения аргумента			
варианта	*x*1	*x*2	*x*3	*x*4
9	0,1539	0,2569	0,14	0,2665
19	0,1732	0,2444	0,1452	0,27
29	0,1648	0,255	0,1387	0,28

x	*y*
0,45	20,194
0,46	19,613
0,47	18,942
0,48	18,174
0,49	17,301
0,50	16,312
0,51	15,198
0,52	13,948
0,53	12,550
0,54	10,993
0,55	9,2647
0,56	7,3512

№	Значения аргумента			
варианта	*x*1	*x*2	*x*3	*x*4
10	0,455	0,5575	0,44	0,5674
20	0,4732	0,5568	0,4455	0,57
30	0,4675	0,5511	0,4421	0,58

4.5 Индивидуальное задание №4.2

Задание: Найдите приближенное значение функции при заданном значении аргумента с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа, если функция задана: 1) в неравноотстоящих узлах таблицы; 2) в равноотстоящих узлах таблицы.

Варианты к заданию 1)

Таблица 1			
x	y	№ в-та	x
0,43	1,63597	1	0,702
0,48	1,73234	7	0,512
0,55	1,87686	13	0,645
0,62	2,03345	19	0,736
0,7	2,22846	25	0,608
0,75	2,35973		

Таблица 2			
x	y	№ в-та	x
0,02	1,02316	2	0,102
0,08	1,0959	8	0,114
0,12	1,14725	14	0,125
0,17	1,21483	20	0,203
0,23	1,3012	26	0,154
0,3	1,40976		

Таблица 3			
x	y	№ в-та	x
0,35	2,73951	3	0,526
0,41	2,3008	9	0,453
0,47	1,96864	15	0,482
0,51	1,78776	21	0,552
0,56	1,59502	27	0,436
0,64	1,3431		

Таблица 4			
x	y	№ в-та	x
0,41	2,57418	4	0,616
0,46	2,32513	10	0,478
0,52	2,09336	16	0,665
0,6	1,86203	22	0,537
0,65	1,74926	28	0,673
0,72	1,62098		

Таблица 5			
x	y	№ в-та	x
0,68	0,80866	5	0,896
0,73	0,89492	11	0,812
0,8	1,02964	17	0,774
0,88	1,20966	23	0,955
0,93	1,34087	29	0,715
0,99	1,52368		

Таблица 6			
x	y	№ в-та	x
0,11	9,0542	6	0,314
0,15	6,6165	12	0,235
0,21	4,6917	18	0,332
0,29	3,351	24	0,275
0,35	2,7395	30	0,186
0,4	2,3652		

Варианты к заданию 2)

Таблица 1

x	y	№ варианта	x
1,375	5,04192	1	1,3832
1,380	5,17744	7	1,3926
1,385	5,32016	13	1,3862
1,390	5,47069	19	1,3934
1,395	5,62968	25	1,3866
1,400	5,79788		

Таблица 2

x	y	№ варианта	x
0,115	8,65729	2	0,1264
0,120	8,29329	8	0,1315
0,125	7,95829	14	0,1232
0,130	7,64893	20	0,1334
0,135	7,36235	26	0,1285
0,140	7,09613		

Таблица 3

x	y	№ варианта	x
0,150	6,61659	3	0,1521
0,155	6,39989	9	0,1611
0,160	6,19658	15	0,1662
0,165	6,00551	21	0,1542
0,170	5,82558	27	0,1625
0,175	5,65583		

Таблица 4

x	y	№ варианта	x
0,180	5,61543	4	0,1838
0,185	5,46693	10	0,1875
0,190	5,32634	16	0,1944
0,195	5,19304	22	0,1976
0,200	5,06649	28	0,2038
0,205	4,94619		

Таблица 5

x	y	№ варианта	x
0,210	4,8317	5	0,2121
0,215	4,72261	11	0,2165
0,220	4,61855	17	0,2232
0,225	4,51919	23	0,2263
0,230	4,42422	29	0,2244
0,235	4,33337		

Таблица 6

x	y	№ варианта	x
1,415	0,888551	6	1,4179
1,420	0,889599	12	1,4258
1,425	0,890637	18	1,4396
1,430	0,891667	24	1,4236
1,435	0,892687	30	1,4315
1,440	0,893698		

4.6 Индивидуальное задание №4.3

Задание: Аппроксимируйте функцию многочленом второй степени методом наименьших квадратов.

Вариант №1		Вариант №2		Вариант №3		Вариант №4	
x	y	x	y	x	y	x	y
1,42	0,8886	0,15	0,8607	0,45	20,195	1,2	0,888551
1,42	0,8896	0,2	0,8187	0,46	19,613	1,3	0,889599
1,43	0,8906	0,25	0,7788	0,47	18,943	1,4	0,890637
1,43	0,8917	0,3	0,7408	0,48	18,175	1,5	0,891667
1,44	0,8927	0,35	0,7047	0,49	17,301	1,6	0,892697
1,44	0,8937	0,4	0,6703	0,5	16,312	1,7	0,893727
1,45	0,8948	0,45	0,6376	0,51	15,198	1,8	0,894757
1,45	0,8958	0,5	0,5959	0,52	13,948	1,9	0,895787
1,46	0,8969	0,55	0,5588	0,53	12,551	2	0,896817
1,46	0,8979	0,6	0,5216	0,54	10,994	2,1	0,897847
1,47	0,8989	0,65	0,4845	0,55	9,2647	2,2	0,898877
Вариант №5		Вариант №6		Вариант №7		Вариант №8	
x	y	x	y	x	y	x	y
1,4	0,8855	3,5	33,115	0,18	5,6154	0,115	8,65729
1,5	0,886	3,55	34,813	0,185	5,4669	0,12	8,29329
1,6	0,8064	3,6	36,598	0,19	5,4326	0,125	7,95829
1,7	0,7802	3,65	38,475	0,195	5,193	0,13	7,64893
1,8	0,7406	3,7	40,447	0,2	5,0665	0,135	7,36235
1,9	0,701	3,75	42,521	0,205	4,9462	0,14	7,09613
2	0,6614	3,8	44,242	0,21	4,8081	0,145	6,84812
2,1	0,6219	3,85	46,123	0,215	4,6713	0,15	6,61659
2,2	0,5823	3,9	49,402	0,22	4,5345	0,155	6,19658
2,3	0,5427	3,95	52,682	0,225	4,3978	0,16	5,93811
2,4	0,5032	4	55,962	0,23	4,261	0,165	5,64401
Вариант №9		Вариант №10		Вариант №11		Вариант №12	
x	y	x	y	x	y	x	y
1,21	0,8551	1,41	0,551	0,01	0,9918	0,101	1,2618
1,22	0,8599	1,42	0,599	0,06	0,9519	0,106	1,2764
1,23	0,8064	1,43	0,637	0,11	0,9137	0,111	1,2912
1,24	0,7917	1,44	0,6817	0,16	0,8769	0,116	1,3061
1,25	0,7674	1,45	0,7247	0,21	0,8416	0,121	1,3213

1,26	0,743	1,46	0,7677	0,26	0,8078	0,126	1,3366
1,27	0,7186	1,47	0,8107	0,31	0,7753	0,131	1,3512
1,28	0,6943	1,48	0,8537	0,36	0,7441	0,136	1,3662
1,29	0,6699	1,49	0,8967	0,41	0,7142	0,141	1,3811
1,3	0,6455	1,5	0,9397	0,46	0,6855	0,146	1,3961
1,31	0,6212	1,51	0,9827	0,51	0,6579	0,151	1,4110
Вариант №13		Вариант №14		Вариант №15		Вариант №16	
x	y	x	y	x	y	x	y
0,15	4,4817	0,11	4,4817	0,13	4,4817	0,18	5,6154
0,16	4,953	0,13	4,953	0,16	4,9531	0,185	5,4669
0,17	5,4736	0,15	5,4736	0,19	5,4736	0,19	5,4326
0,18	6,0496	0,17	5,9613	0,22	6,0496	0,195	5,1930
0,19	6,6859	0,19	6,4573	0,25	6,5456	0,2	5,0664
0,2	7,3891	0,21	6,9532	0,28	7,0681	0,205	4,9469
0,21	8,1662	0,23	7,4492	0,31	7,5904	0,21	4,8080
0,22	9,023	0,25	7,9451	0,34	8,1128	0,215	4,6713
0,23	9,9743	0,27	8,4411	0,37	8,6353	0,22	4,5345
0,24	11,02	0,29	8,9372	0,4	9,1577	0,225	4,3977
0,25	12,183	0,31	9,4332	0,43	9,6801	0,23	4,2609
Вариант №17		Вариант №18		Вариант №19		Вариант №20	
x	y	x	y	x	y	x	y
3,5	33,115	0,115	8,6573	0,12	4,4817	0,1	4,1726
3,55	34,813	0,12	8,2933	0,16	4,9531	0,11	4,5356
3,6	36,598	0,125	7,9583	0,2	5,4736	0,12	5,3645
3,65	38,475	0,13	7,6489	0,24	5,9613	0,13	5,8766
3,7	40,447	0,135	7,3624	0,28	6,4573	0,14	6,4716
3,75	42,521	0,14	7,0961	0,32	6,9532	0,15	7,0666
3,8	44,242	0,145	6,8481	0,36	7,4492	0,16	7,6616
3,85	46,123	0,15	6,6166	0,4	7,9451	0,17	8,2566
3,9	49,402	0,155	6,1966	0,44	8,4411	0,18	8,8516
3,95	52,682	0,16	5,9381	0,48	8,9372	0,19	9,4466
4	55,962	0,165	5,6441	0,52	9,4331	0,2	10,041
Вариант №21		Вариант №22		Вариант №23		Вариант №24	
x	y	x	y	x	y	x	y
0,1	1,183	0,101	1,6183	0,01	1,6183	0,101	2,26183
0,16	1,644	0,106	1,644	0,06	1,7644	0,106	2,27644
0,22	1,122	0,111	1,9122	0,11	1,9122	0,111	2,29122

0,28	1,617	0,116	1,617	0,16	2,0589	0,116	2,30617
0,34	1,5865	0,121	1,764	0,21	2,2058	0,121	2,3213
0,4	1,6645	0,126	1,7904	0,26	2,3528	0,126	2,3366
0,46	1,7425	0,131	1,8168	0,31	2,4997	0,131	2,351265
0,52	1,8205	0,136	1,8432	0,36	2,6467	0,136	2,366219
0,58	1,8985	0,141	1,8697	0,41	2,7936	0,141	2,381172
0,64	1,9765	0,146	1,8961	0,46	2,9406	0,146	2,396126
0,7	2,0545	0,151	1,9225	0,51	3,0875	0,151	2,41108
Вариант №25		Вариант №26		Вариант №27		Вариант №28	
x	y	x	y	x	y	x	y
0,11	0,2618	0,11	4,2618	0,201	1,261	0,31	1,26183
0,16	0,2764	0,16	4,2764	0,206	1,276	0,36	1,27644
0,21	0,2912	0,21	4,2912	0,211	1,291	0,41	1,29122
0,26	0,3062	0,26	4,3062	0,216	1,306	0,46	1,30617
0,31	0,3213	0,31	4,3213	0,221	1,321	0,51	1,3213
0,36	0,3366	0,36	4,3366	0,226	1,336	0,56	1,3366
0,41	0,3513	0,41	4,3513	0,231	1,351	0,61	1,351265
0,46	0,3662	0,46	4,3662	0,236	1,366	0,66	1,366218
0,51	0,3812	0,51	4,3812	0,241	1,381	0,71	1,381172
0,56	0,3961	0,56	4,3961	0,246	1,396	0,76	1,396126
0,61	0,4111	0,61	4,4111	0,251	1,411	0,81	1,41108
Вариант №29		Вариант №30					
x	y	x	y				
0,1	2,2618	0,2	0,2618				
0,11	2,2764	0,22	0,2764				
0,12	2,2912	0,24	0,2912				
0,13	2,3062	0,26	0,3062				
0,14	2,3213	0,28	0,3213				
0,15	2,3366	0,3	0,3366				
0,16	2,3513	0,32	0,3513				
0,17	2,3662	0,34	0,3662				
0,18	2,3812	0,36	0,3812				
0,19	2,3961	0,38	0,3961				
0,2	2,4111	0,4	0,4111				

5 ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

5.1 Численное интегрирование

Пусть требуется вычислить интеграл:

$$J = \int_a^b f(x)dx. \qquad (5.1)$$

Если функция $f(x)$ является непрерывной на отрезке $[a;b]$, то интеграл (5.1) существует и может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница:

$$J = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\ . \qquad (5.2)$$

Однако для большинства функций $f(x)$ первообразную $F(x)$ не удается выразить через элементарные функции. Кроме того, функция $f(x)$ часто задается в виде таблицы ее значений для определенных значений аргумента. Все это порождает потребность в построении формул численного интегрирования, или квадратурных формул.

Приближенное равенство:

$$J = \int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=1}^{N} A_i f(x_i) = J_N. \qquad (5.3)$$

называется квадратурной формулой, определяемой узлами $x_i \in [a,b]$ и коэффициентами A_i.

Величина

$$R_N(f) = J - J_N \qquad (5.4)$$

называется остаточным членом квадратурной формулы.

В зависимости от способа задания подынтегральной функции $f(x)$ рассматриваются два различных в смысле реализации случая численного интегрирования.

Задача 1. На отрезке $[a;b]$ в узлах x_i заданы значения f_i некоторой функции f, принадлежащей определенному классу F. Требуется приближенно вычислить интеграл (5.1) и оценить погрешность полученного значения.

Так обычно ставится задача численного интегрирования в том случае, когда подынтегральная функция задана в виде таблицы.

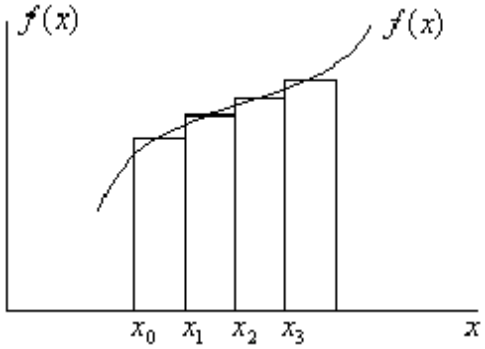
Задача 2. На отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ задана в виде аналитического выражения. Требуется вычислить интеграл (5.1) с заданной предельно допустимой погрешностью ε.

Формула прямоугольников самая простая квадратурная формула вычисления интеграла, в которой используются значения функции:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} f(x_{i-\frac{1}{2}}) \cdot h, \quad R_n = \frac{b-a}{24} h^2 f''(\xi), \ \xi \in [a,b], \tag{5.5}$$

где x_i – узлы, на которые разбивается отрезок $[a,b]$; $h=x_{i-1}-x_i$ – шаг; $f(x_{i-1})$ – значение функции в середине отрезка $[x_{i-1}, x_i]$.

Геометрически формула прямоугольников может быть представлена следующим рисунком.

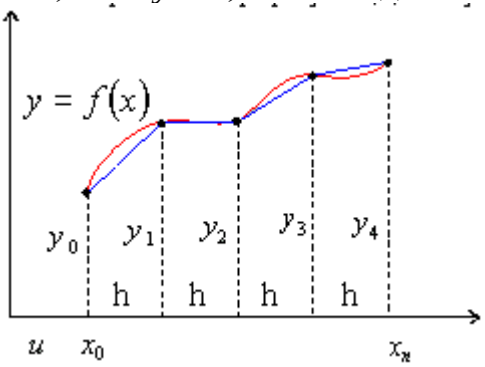


Квадратурная формула трапеции имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot (0.5 \cdot f_0 + f_1 + \ldots + f_{N-1} + 0.5 \cdot f_N), \tag{5.6}$$

$$R = -\frac{b-a}{12} h^2 y''(\xi), \ \xi \in (a,b).$$

Геометрически эта формула получается, если график функции $y=f(x)$ заменить ломанной. Если $y''>0$, то формула трапеции дает значение интеграла с избытком, если $y''<0$, то – с недостатком.

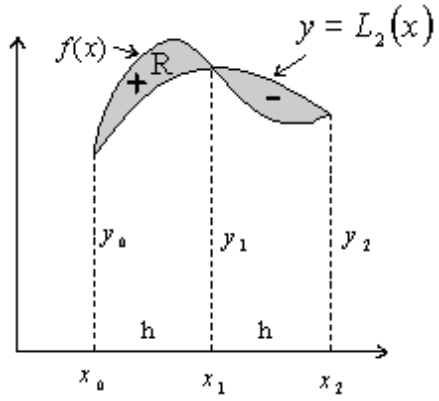


Квадратурная формула Симпсона имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6} \cdot (f_0 + f_N + 2 \cdot (f_1 + f_2 + \ldots f_{N-1}) + 4 \cdot (f_{\frac{1}{2}} + f_{\frac{3}{2}} + \ldots + f_{N-\frac{1}{2}}), \tag{5.7}$$

$$R = -\frac{b-a}{180} h^4 y^{(4)}(\xi), \ \xi \in (a,b).$$

Геометрически эта формула означает, что кривую $y=f(x)$ мы заменяем параболой $y=L_2(x)$ проходящей через три точки.



Пример 1

Вычислить интеграл $S=\int_0^1 (2+3e^{x^2})dx$ по формулам прямоугольника, трапеции, Симпсона.

Решение: Вычислим интеграл методом прямоугольников. Разобьем интервал интегрирования на более мелкие интервалы с шагом 0,1. Найдем середины интервалов $x_{i-1/2}$. Найдем значения подынтегральной функции в этих точках, вычисления представлены в таблице:

i	x_i	$x_{i-1/2}$	$f(x_{i-1/2})$
0	0	-	-
1	0,1	0,05	5,0075
2	0,2	0,15	5,0683
3	0,3	0,25	5,1935
4	0,4	0,35	5,3910
5	0,5	0,45	5,6734
6	0,6	0,55	6,0597
7	0,7	0,65	6,5773
8	0,8	0,75	7,2652
9	0,9	0,85	8,1787
10	1	0,95	9,3973
			63,8118

$$\int_0^1 (2+3e^{x^2})dx \approx 0{,}1\cdot((2+3\cdot e^{0{,}05^2})+(2+3\cdot e^{0{,}15^2})+(2+3\cdot e^{0{,}25^2})+(2+3\cdot e^{0{,}35^2})+$$

$$+(2+3\cdot e^{0{,}45^2})+(2+3\cdot e^{0{,}55^2})+(2+3\cdot e^{0{,}65^2})+(2+3\cdot e^{0{,}75^2})+(2+3\cdot e^{0{,}85^2}))+ \quad \cdot$$

$$+(2+3\cdot e^{0{,}95^2}))=6{,}3812;$$

Вычислим погрешность метода:

$$R_n = \frac{b-a}{24} h^2 f''(\xi),\ \ \xi \in [a,b],$$

$$R_n = \frac{1-0}{24} 0{,}1^2 \left(6e^{\xi^2}(1+2\xi^2)\right) \le \frac{0{,}01}{24} * 18e = 0{,}0204,\ \ \xi \in [0,1],$$

С учетом погрешности округления:

$$\int_0^1 (2+3e^{x^2})dx = 6{,}3812 \pm 0{,}02045;$$

Найдем интеграл методом трапеции. Определим значения подынтегральной функции в точках x_i, i=0,..,10, вычисления представлены в таблице:

i	xi	f(xi)
0	0	5
1	0,1	5,03
2	0,2	5,122
3	0,3	5,283
4	0,4	5,521
5	0,5	5,852
6	0,6	6,3
7	0,7	6,897
8	0,8	7,689
9	0,9	8,744
10	1	10,15

По формуле трапеции: $\int_a^b f(x)dx \approx h(0{,}5 f_0 + f_1 + ... + f_{N-1} + 0{,}5 f_N)$.

$$\int_0^1 (2+3e^{x^2})dx \approx 0{,}1((0{,}5(2+3e^{0})) + (2+3e^{0{,}1^2}) + (2+3e^{0{,}2^2}) +$$

$$+ (2+3e^{0{,}3^2}) + (2+3e^{0{,}4^2}) + (2+3e^{0{,}5^2}) + (2+3e^{0{,}6^2}) + (2+3e^{0{,}7^2}) +$$

$$+ (2+3e^{0{,}8^2}) + (2+3e^{0{,}9^2}) + (0{,}5(2+3e^{1^2}))) = 6{,}4015.$$

Найдем погрешность: $R = -\frac{b-a}{12} h^2 y''(\xi),\ \xi \in (a,b)$

$$R_n = -\frac{1-0}{12} 0{,}1^2 \left(6e^{\xi^2}(1+2\xi^2)\right) \le -\frac{0{,}01}{24} * 6 = -0{,}0025,\ \ \xi \in [0,1]$$

С учетом погрешности округления:

$$\int_0^1 (2+3e^{x^2})dx = 6{,}4015 \pm 0{,}00255;$$

Определим интеграл по формуле Симпсона, воспользуемся таблицей:

i	x_i	$x_{i-1/2}$	$f(x_i)$	$f(x_{i-1/2})$
0	0	-	5	-
1	0,1	0,05	5,03	5,0075
2	0,2	0,15	5,122	5,0683
3	0,3	0,25	5,283	5,1935
4	0,4	0,35	5,521	5,3910
5	0,5	0,45	5,852	5,6734
6	0,6	0,55	6,3	6,0597
7	0,7	0,65	6,897	6,5773
8	0,8	0,75	7,689	7,2652
9	0,9	0,85	8,744	8,1787
10	1	0,95	10,15	9,3973

По формуле Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}\cdot(f_0 + f_N + 2\cdot(f_1 + f_2 + \dots f_{N-1}) + 4\cdot(f_{\frac{1}{2}} + f_{\frac{3}{2}} + \dots + f_{N-\frac{1}{2}})\cdot$$

$$\int_0^1 (2+3\cdot e^{x^2}) = \frac{0,1}{6}((2+3e^0)+(2+3e^{1^2})+2((2+3e^{0,1^2})+(2+3e^{0,2^2})+$$

$$+(2+3e^{0,3^2})+(2+3e^{0,4^2})+(2+3e^{0,5^2})+(2+3e^{0,6^2})+(2+3e^{0,7^2})+(2+3e^{0,8^2})+$$

$$+(2+3e^{0,9^2}))+4\cdot((2+3e^{0,05^2})+(2+3e^{0,15^2})+(2+3e^{0,25^2})+(2+3e^{0,35^2})+$$

$$+(2+3e^{0,45^2})+(2+3e^{0,55^2})+(2+3e^{0,65^2})+(2+3e^{0,75^2})+(2+3e^{0,85^2})+$$

$$+(2+3e^{0,95^2})))=6,3880.$$

Вычислим погрешность: $R=-\frac{b-a}{180}h^4 y^{(4)}(\xi),\ \xi\in(a,b)$,

$$R=-\frac{1-0}{180}0,1^4(e^{\xi^2}(36+14\xi^2+48\xi^4))\le -0,00002,\ \xi\in(0,1),$$

С учетом погрешности округления получаем:

$$\int_0^1 (2+3\cdot e^{x^2}) = 6,3880\pm 0,00007.$$

5.2 Численное дифференцирование

При численном решении многих практических задач часто возникает необходимость получить значения производных различных порядков функции $y=f(x)$, заданной в виде таблицы или в виде сложного аналитического выражения. В таких случаях используют приближенные методы дифференцирования.

Один из возможных путей решения этой задачи заключается в применении теории интерполирования. Построим для функции $f(x)$ по узлам x_i, $i=0,1,...,n$ интерполяционный полином $Pn(x)$ с остаточным членом $Rn(x)$ так, что

$$f(x)=Rn(x)+Pn(x) \qquad (5.8)$$

Продифференцируем правую и левую части соотношения (5.8) по *x m* раз и положим *x=x**

$$f^{m}(x^{*}) = R_n^m(x^{*}) + P_n^m(x^{*}) \ . \qquad (5.9)$$

Производная от многочлена $P_n^m(x)$ применяется для приближенного представления искомой производной $f^{m}(x) \cong P_n^m(x)$.

Вычисление высших производных может быть сведено к последовательному вычислению низших. Приближенные формулы для вычисления производных получаются путем дифференцирования интерполяционных многочленов Ньютона, Стирлинга и Бесселя.

Например, если выбрать узлы $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots$ и воспользоваться интерполяционным многочленом Ньютона, то мы получим формулу численного дифференцирования вида:

$$\begin{aligned} y'(x) &\approx \frac{1}{h}(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 + ...), \\ y''(x) &\approx \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + ...). \end{aligned} \qquad (5.10)$$

Формулы, получающиеся из интерполяционного полинома Бесселя:

$$\begin{aligned} y'(x) &\approx \frac{1}{h}(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{3t^2 - 3t + \frac{1}{2}}{6}\Delta^3 y_{-1} + ...), \\ y''(x) &\approx \frac{1}{h^2}(\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_{01}}{2} + \frac{2t-1}{2}\Delta^3 y_{-1} + ...). \end{aligned} \qquad (5.11)$$

По интерполяционной формуле Стирлинга:

$$\begin{aligned} y'(x) &\approx \frac{1}{h}(\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + t\Delta^2 y_{-1} + \frac{3t^2 - 1}{6}\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + ...), \\ y''(x) &\approx \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_{-1} + t\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + ...). \end{aligned} \qquad (5.12)$$

Из интерполяционного полинома Гаусса:

$$\begin{aligned} y'(x) &\approx \frac{1}{h}(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{3t^2 - 1}{6}\Delta^3 y_{-1} + ...), \\ y''(x) &\approx \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_{-1} + t\Delta^3 y_{-1} + ...). \end{aligned} \qquad (5.13)$$

Пример 2

С помощью интерполяционных формул Ньютона, Гаусса, Стирлинга, Бесселя найти значение первой и второй производных при данных значениях аргумента для функции заданной таблично:

x	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6
$Y(x)$	2,86	3,95	4,94	5,8	6,5	7	7,29	7,3

Решение:

Заданные аргументы x_1=1,2, x_2=2,23, x_3=2,76, x_4=3,1.
Построим таблицу разностей:

x	$Y(x)$	$\Delta Y(x)$	$\Delta^2 Y(x)$	$\Delta^3 Y(x)$
0,8	2,857	1,089	-0,097	-0,032
1,2	3,946	0,992	-0,129	-0,032
1,6	4,938	0,863	-0,161	-0,034
2	5,801	0,702	-0,195	-0,034
2,4	6,503	0,507	-0,229	-0,036
2,8	7,01	0,278	-0,265	
3,2	7,288	0,013		
3,6	7,301			

Положим x_0=1,2; тогда $t=(x-x_0)/h$=(1,2-1,2)/0,4=0. Воспользуемся для вычислений формулами:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 + ...),$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + ...),$$

получающимися из первой интерполяционной формулы Ньютона. Y'=2,614; Y''=0,606.

Положим x_0=2; Тогда $t=(x-x_0)/h$=(2,23-2)/0,4=0,575. Воспользуемся для вычислений формулами:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{3t^2 - 3t + \frac{1}{2}}{6}\Delta^3 y_{-1} + ...),$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2}(\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_{01}}{2} + \frac{2t-1}{2}\Delta^3 y_{-1} + ...),$$

получающимися из формулы Бесселя. Y'=1,725; Y''=-1,129.

Положим x_0=2,8; Тогда t= (2,76-2,8)/0,4=-0,1.

По формуле Стирлинга:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}(\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + t\Delta^2 y_{-1} + \frac{3t^2 - 1}{6}\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + ...),$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_{-1} + t\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + ...),$$

Y'=1,053; Y''=-1,409.

Положим x_0=2,8; Тогда t= (3,1-2,8)/0,4=0.75.
По формуле Гаусса:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{3t^2 - 1}{6}\Delta^3 y_{-1} + ...),$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_{-1} + t\Delta^3 y_{-1} + ...),$$

Y'=0,542; Y''=-1,6.

5.3 Индивидуальное задание №5.1

Задание: Вычислить интеграл по формулам прямоугольника, трапеции, Симпсона.

Вариант №1

1) $\int_{0,6}^{1,4} \frac{\sqrt{x^2+5}}{2x+\sqrt{x^2+0,5}}dx$; 2) $\int_{0,2}^{0,8} \frac{\sin(2x+0,5)}{2+\cos(x^2+1)}dx$;

Вариант №2

$\int_{0,4}^{1,2} \frac{\sqrt{0,5x+2}}{\sqrt{2x^2+1}+0,8}dx$; 2) $\int_{0,3}^{0,9} \frac{\cos(0,8x+1,2)}{1,5+\sin(x^2+0,6)}dx$;

Вариант №3

1) $\int_{0,8}^{1,8} \frac{\sqrt{0,8x^2+1}}{x+\sqrt{1,5x^2+2}}dx$; 2) $\int_{0,4}^{1,0} \frac{\sin(x+1,4)}{0,8+\cos(2x^2+0,5)}dx$;

Вариант №4

1) $\int_{1,0}^{2,2} \frac{\sqrt{1,5x+0,6}}{1,6+\sqrt{0,8x^2+2}}dx$; 2) $\int_{0,6}^{1,0} \frac{\cos(0,6x^2+0,4)}{1,4+\sin^2(x+0,7)}dx$;

Вариант №5

$$1)\int_{1,2}^{2,0}\frac{\sqrt{2x^2+1,6}}{2x+\sqrt{0,5x^2+3}}dx;\ \ 2)\int_{0,5}^{1,3}\frac{\sin(0,5x+0,4)}{1,2+\cos(x^2+0,4)}dx;$$

Вариант №6

$$1)\int_{1,3}^{2,5}\frac{\sqrt{x^2+0,6}}{1,4+\sqrt{0,8x^2+1,3}}dx;\ \ 2)\int_{0,4}^{0,8}\frac{\cos(x^2+0,6)}{0,7+\sin(0,8x+1)}dx;$$

Вариант №7

$$1)\int_{1,2}^{2,6}\frac{\sqrt{0,4x+1,7}}{1,5x+\sqrt{x^2+1,3}}dx;\ \ 2)\int_{0,3}^{1,5}\frac{\sin(0,3+1,2)}{1,3+\cos^2(0,5x+1)}dx;$$

Вариант №8

$$1)\int_{0,8}^{1,6}\frac{\sqrt{0,3x^2+2,3}}{1,8+\sqrt{2x+1,6}}dx;\ \ 2)\int_{0,5}^{1,8}\frac{\cos(x^2+0,6)}{1,2+\sin(0,7x+0,2)}dx;$$

Вариант №9

$$1)\int_{1,2}^{2,0}\frac{\sqrt{0,6x+1,7}}{2,1x+\sqrt{0,7x^2+1}}dx;\ \ 2)\int_{0,4}^{1,2}\frac{\sin(1,5x+0,3)}{2,3+\cos(0,4x^2+1)}dx;$$

Вариант №10

$$1)\int_{0,8}^{2,4}\frac{\sqrt{0,4x^2+1,5}}{2,5+\sqrt{2x+0,8}}dx;\ \ 2)\int_{0,4}^{1,2}\frac{\cos(x^2+0,8)}{1,5+\sin(0,6x+0,5)}dx;$$

Вариант №11

$$1)\int_{1,2}^{2,8}\frac{\sqrt{1,2x+0,7}}{1,4x+\sqrt{1,3x^2+0,5}}dx;\ \ 2)\int_{0,5}^{1,3}\frac{\sin(0,7x+0,4)}{2,2+\cos(0,3x^2+0,7)}dx;$$

Вариант №12

$$1)\int_{0,6}^{2,4}\frac{\sqrt{1,1x^2+0,9}}{1,6x+\sqrt{0,8x^2+1,4}}dx;\ \ 2)\int_{0,4}^{1,4}\frac{\cos(0,8x^2+1)}{1,4+\sin(0,3x+0,5)}dx;$$

Вариант №13

$$1)\int_{0,7}^{2,1}\frac{\sqrt{0,6x+1,5}}{2x+\sqrt{0,8x^2+3}}dx;\ \ 2)\int_{0,2}^{1}\frac{\sin(0,8x^2+0,3)}{0,7+\cos(1,2x+0,3)}dx;$$

Вариант №14

1) $\int_{0,8}^{2,4} \frac{\sqrt{1,5x+2,3}}{3+\sqrt{0,3x+1}}dx$; 2) $\int_{0,3}^{1,1} \frac{\cos(0,3x+0,5)}{1,8+\sin(x^2+0,8)}dx$;

Вариант №15

1) $\int_{1,9}^{2,6} \frac{\sqrt{2x+1,7}}{2,4+\sqrt{1,2x^2+0,6}}dx$; 2) $\int_{0,3}^{1,1} \frac{\sin(0,6x^2+0,3)}{2,4+\cos(x+0,5)}dx$;

Вариант №16

1) $\int_{0,2}^{1,9} \frac{\sqrt{0,7x^2+2,3}}{3,2+\sqrt{0,8x+1,4}}dx$; 2) $\int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos(0,4x+0,6)}{0,8+\sin^2(x+0,5)}dx$;

Вариант №17

1) $\int_{1}^{2,6} \frac{\sqrt{0,4x+3}}{0,7x+\sqrt{2x^2+0,5}}dx$; 2) $\int_{0,4}^{1,8} \frac{\sin(0,2x^2+0,7)}{1,4+\cos(0,5x+1,2)}dx$;

Вариант №18

1) $\int_{0,7}^{2,1} \frac{\sqrt{1,7x^2+0,2}}{1,4+\sqrt{1,2x+1,3}}$; 2) $\int_{0,2}^{1} \frac{\cos(0,3x+0,8)}{0,9+2\sin(0,4x+0,3)}dx$;

Вариант №19

1) $\int_{0,6}^{2,2} \frac{\sqrt{1,5x+1}}{1,2x+\sqrt{x^2+1,8}}dx$; 2) $\int_{0,3}^{1,1} \frac{\sin(0,8x+1,3)}{1,4+\cos(x^2+0,4)}dx$;

Вариант №20

1) $\int_{1,2}^{3} \frac{\sqrt{2x^2+0,7}}{1,5+\sqrt{0,8x+1}}dx$; 2) $\int_{0,5}^{1,3} \frac{\cos(x^2+0,2)}{1,5+\sin(x+0,8)}dx$;

Вариант №21

1) $\int_{0,4}^{1,4} \frac{\sqrt{2x^2+0,5}}{x+\sqrt{6x+0,4}}dx$; 2) $\int_{0,6}^{1,8} \frac{\sin(0,9x+4)}{1,2x+\cos(5x+1)}dx$;

Вариант №22

1) $\int_{1,2}^{2,4} \frac{\sqrt{3,1x^2+0,5}}{12,4+\sqrt{0,5x^2+2}}dx$; 2) $\int_{1,4}^{2,8} \frac{\cos(2,1x+4)}{2,3+\sin(0,2x^2+1,4)}dx$;

Вариант №23

1) $\int_{1,4}^{2,4} \frac{\sqrt{0,4x^2+1,5}}{2,5+\sqrt{4,1x+0,6}}dx$; 2) $\int_{1,6}^{1,8} \frac{\cos(2,2x+1,4)}{2x+\sin(x+0,7)}dx$;

Вариант №24

1) $\int_{1,5}^{2,7} \frac{\sqrt{0,6x^2+0,4}}{2,4+\sqrt{4x^2+1,5}}dx$; 2) $\int_{1,2}^{2,2} \frac{\sin(1,1x+1,7)}{2,4x+\cos(0,4x+1)}dx$;

Вариант №25

1) $\int_{1,6}^{2,4} \frac{\sqrt{0,2x^2+1,3}}{x+\sqrt{0,1x^2+0,6}}dx$; 2) $\int_{1,2}^{1,8} \frac{\sin(3x+0,7)}{3x+\cos(5x+0,3)}dx$;

Вариант №26

1) $\int_{1,2}^{2,4} \frac{\sqrt{0,6x^2+0,6}}{2,2+\sqrt{0,1x^2+4}}dx$; 2) $\int_{1,2}^{2,8} \frac{\cos(2,1x+0,6)}{2x+\sin(1,2x+1)}dx$;

Вариант №27

1) $\int_{1,6}^{2,4} \frac{\sqrt{2,3x^2+0,5}}{x+\sqrt{2,3x^2+0,5}}dx$; 2) $\int_{0,2}^{1,8} \frac{\sin(2,3x+0,6)}{2,1x+\cos(2,5x+1)}dx$;

Вариант №28

1) $\int_{0,6}^{2,4} \frac{\sqrt{1,3x^2+5,2}}{2,2x+\sqrt{x^2+5}}dx$; 2) $\int_{1,2}^{2,8} \frac{\sin(3x+0,8)}{3+\cos(2,5x^2+1,2)}dx$;

Вариант №29

1) $\int_{0,2}^{1,4} \frac{\sqrt{2,3x^2+0,4}}{2,2x^2+\sqrt{x^2+1,4}}dx$; 2) $\int_{0,2}^{1,8} \frac{\sin(2,1x+0,4)}{x+\cos(3x+1,1)}dx$;

Вариант №30

1) $\int_{1,6}^{2,4} \frac{\sqrt{0,3x^2+0,5}}{2,3x+\sqrt{2x+1,5}}dx$; 2) $\int_{1,2}^{2,8} \frac{\sin(x+5,5)}{3x+\cos(1,2x+1,7)}dx$;

5.4 Индивидуальное задание №5.2

Задание: С помощью интерполяционных формул Ньютона, Гаусса, Стирлинга, Бесселя найти значение первой и второй производных при данных значениях аргумента для функции заданной таблично.

Таблица 1

x	$Y(x)$	x	$Y(x)$
2,4	3,526	3,6	4,22
2,6	3,782	3,8	4,331
2,8	3,945	4	4,507
3	4,043	4,2	4,775
3,2	4,104	4,4	5,159
3,4	4,155	4,6	5,683

1) x=2,4+0,05n
2) x=3,12+0,03n
3) x=4,5-0,06n
4) x=4,04-0,04n
(для вариантов n=1, 3, 5,…, 29)

Таблица 2

x	$Y(x)$	x	$Y(x)$
1,5	10,517	4,5	8,442
2	10,193	5	8,482
2,5	9,807	5,5	8,862
3	9,387	6	9,701
3,5	8,977	6,5	11,132
4	8,637	7	13,302

1) x=1,6+0,08n
2) x=3,27+0,11n
3) x=6,3-0,12n
4) x=5,85-0,09n
(для вариантов n=2, 4, 6,…, 30)

6 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

6.1 Задача Коши

Рассмотрим задачу Коши: найти неизвестную функцию $u(t)$ удовлетворяющую дифференциальному уравнению и начальному условию:

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = f(t,u), \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \qquad (6.1)$$

Задача (6.1) при определенных ограничениях, наложенных на функцию $f(t,u)$ (в дальнейшем мы будем предполагать, что эти ограничения выполняются), имеет единственное решение.

Введем по переменной t равномерную сетку с шагом $\tau > 0$, т.е. рассмотрим множество точек $\omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0,1,2,\ldots\}$.

При численном решении задачи (6.1) требуется определить значение неизвестной функции $u(t)$ в некоторой точке t^*.

Для решения поставленной задачи интервал $[t_0,\ t^*]$ разбивается на n частей с точками разбиения $t_0,\ t_1,\ldots,\ t_n=t^*$ (t_i-t_{i-1}=t_i). Затем по приближенным формулам находят последовательно $u_1=u(t_1)$, $u_2=u(t_2)$, …, $u_n=u(t_n)$.

Большинство приближенных формул вычисления $u_i=u(t_i)$ получаются следующим образом. Переписав уравнение (6.1) в форме дифференциалов $\mathrm{d}u=f(t,u)\mathrm{d}t$ и проинтегрировав его в пределах от t_{i-1} до t_i, получим:

$$u_i = u_{i-1} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t,u)dt = u_{i-1} + \Delta u_{i-1}. \qquad (6.2)$$

Это и есть исходное соотношение для различных методов. Сами методы в дальнейшем различаются то тем дополнительным предположениям, которые принимаются для приближенного вычисления приращения:

$$\Delta u_{i-1} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t,u)dt.$$

6.2 Метод Эйлера, метод Эйлера с пересчетом

В методе Эйлера интеграл вычисляется с помощью формулы левых прямоугольников:

$$\Delta u_{i-1} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t,u)dt \approx \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t_{i-1},u_{i-1})dt = \tau f(t_{i-1},u_{i-1}), \qquad (6.3)$$

тогда решение уравнения находится по формулам:

$$\begin{cases} y_i = y_{i-1} + \tau \cdot f(t_{i-1}, y_{i-1}), \quad n = 0,1,2,\ldots, \\ y_0 = u_0 \end{cases}. \tag{6.4}$$

Погрешность приближенной формулы (6.3), а следовательно, и формулы (6.4) на одном шаге есть:

$$R_n(h) = \frac{h^2}{2} f''(c),\ c \in (t_{i-1}, t_i). \tag{6.5}$$

В этом случае говорят, что погрешность метода на одном шаге имеет порядок h^2.

В методе Эйлера с пересчетом сначала определяют вспомогательные величины:

$$y_i^{\,0} = y_{i-1} + \tau \cdot f(t_{i-1}, y_{i-1}). \tag{6.6}$$

А затем интеграл $\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t,u)dt$ вычисляют с помощью формулы трапеций. Тогда приближенная формула для вычисления y_i принимает следующий вид:

$$y_i^{(k)} = y_{i-1} + \frac{h}{2}\left[f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, y_i^{(k-1)})\right]. \tag{6.7}$$

Погрешность этой формулы на одном шаге имеет порядок h^3.

Пример 1

Решить задачу Коши:

$$y' = y\left(\frac{1}{2x} - 1\right);\ x \in [1; 1{,}5];$$
$$y(1) = 2{,}70;$$

методом Эйлера с шагом h=0,125, все вычисления вести с тремя верными знаками в узком смысле.

Решение:

По начальным данным x_0=1, y_0=2,70. По формуле $y'_0 = 2{,}70 * \left(\frac{1}{2*1} - 1\right) = -1{,}35$; Далее по формуле (6.3) $\Delta u_0 = 0{,}125 * (-1{,}35) = -0{,}169$.

Таким образом, по формуле (6.4) получаем y_1=2,70-0,169=2,53.

Дальше вычисляется аналогично, за исходные данные берутся x_1, y_1, далее x_2, y_2 и так далее. Вычисления представлены в таблице.

i	x_i	y_i	y'_i	Δy_i
0	1,000	2,70	-1,35	-0,169
1	1,125	2,53	-1,41	-0,176
2	1,250	2,36	-1,41	-0,176
3	1,375	2,18	-1,38	-0,172
4	1,500	2,01		

Пример 2

Решить задачу Коши:

$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{10}};\ x \in [0{,}6;1{,}6];$

$y_0(0{,}6) = 0{,}8;$

методом Эйлера с пересчетом. Все вычисления вести с тремя верными знаками в узком смысле.

Решение:

Вычислим $y_1^{\,0} = y_0 + \tau \cdot f(t_0, y_0) = 0{,}8 + 0{,}1 * (0{,}6 + \sin\frac{0{,}8}{\sqrt{10}}) = 0{,}885;$

Нулевое приближение найдено, далее находится первое приближение:

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(0)})\right] =$$

$$= 0{,}8 + \frac{0{,}1}{2}\left[(0{,}1 * (0{,}6 + \sin\frac{0{,}8}{\sqrt{10}}) + 0{,}1 * (0{,}7 + \sin\frac{0{,}885}{\sqrt{10}}))\right] = 0{,}891;$$

Второе приближение уточняет первое:

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(1)})\right] =$$

$$= 0{,}8 + \frac{0{,}1}{2}\left[(0{,}1 * (0{,}6 + \sin\frac{0{,}8}{\sqrt{10}}) + 0{,}1 * (0{,}7 + \sin\frac{0{,}891}{\sqrt{10}}))\right] = 0{,}891;$$

Третье приближение делать нет необходимости, так как значения второго и первого приближения совпали. Найдено значение y_1=0,891.

Аналогично проводятся вычисления для нахождения y_2, y_3 и так далее.

Вычисления и приближения значений функции приведены в таблице:

			Приближения (k)			
i	X_i	Y_i	0	1	2	3
0	0,6	0,8	-	-	-	-
1	0,7	0,891	0,885	0,891	0,891	
2	0,8	0,996	0,989	0,996	0,996	
3	0,9	1,114	1,107	1,113	1,114	1,114
4	1	1,245	1,238	1,245	1,245	
5	1,1	1,390	1,383	1,390	1,390	
6	1,2	1,550	1,543	1,550	1,550	
7	1,3	1,725	1,717	1,725	1,725	
8	1,4	1,914	1,907	1,914	1,914	
9	1,5	2,119	2,111	2,119	2,119	
10	1,6	2,338	2,331	2,338	2,338	

6.3 Метод Рунге-Кутта

Явный *m*-этапный метод Рунге-Кутта состоит в следующем. Пусть решение $y_i = y(t_i)$ уже известно. Задаются числовые коэффициенты $a_n, b_{nm}, \quad n = 2,3,\ldots,N, \quad m = 1,2,\ldots,M-1, \quad \sigma_n, \quad n = 1,2,\ldots,M$ и последовательно вычисляются функции:

$$\begin{cases} k_1 = f(t_i, y_i), \\ k_2 = f(t_i + a_2\tau, y_i + b_{21}\tau \cdot k_1), \\ k_3 = f(t_i + a_3\tau, y_i + b_{31}\tau \cdot k_1 + b_{32}\tau \cdot k_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ k_M = f(t_N + a_M\tau, y_N + b_{M1}\tau \cdot k_1 + b_{M2}\tau \cdot k_2 + \ldots + b_{M,M-1}\tau \cdot k_{M-1}). \end{cases} \tag{6.8}$$

Затем из формулы:

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{\tau} = \sum_{m=1}^{M} \sigma_m k_m \tag{6.9}$$

находится новое значение $y_i = y(t_i)$.

В четырех этапном методе Рунге-Кутта сначала определяются вспомогательные величины:

$$\begin{gathered} K_1 = f(x_i, y_i), \\ K_2 = f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{hK_1}{2}), \\ K_3 = f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{hK_2}{2}), \\ K_4 = f(x_i + h; y_i + hK_3), \\ \Delta y_i = \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{gathered} \tag{6.10}$$

.

А за тем находится приближенное значение:

$$y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1}.$$

Погрешность этой формулы на одном шаге имеет порядок h^5.

Пример 3

Решить задачу Коши:

$y' = y(\frac{1}{2x} - 1); \; x \in [1; \; 2];$

$y(1) = 2{,}70;$

методом Рунге-Кутта с шагом h=0,5. Все вычисления вести с тремя верными знаками в узком смысле.

Решение: Найдем вспомогательные величины K_1, K_2, K_3, K_4 при i=0:

$$K_1 = f(x_0, y_0) = 2{,}70 * (\frac{1}{2*1} - 1) = -1{,}35;$$

$$K_2 = f(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{hK_1}{2}) = f(1{,}25; 2{,}363) = 2{,}363 * (\frac{1}{2*1{,}25} - 1) = -1{,}42;$$

$$K_3 = f(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{hK_2}{2}) = f(1{,}25;\ 2{,}346) = 2{,}346 * (\frac{1}{2*1{,}25} - 1) = -1{,}41;$$

$$K_4 = f(x_0 + h; y_0 + hK_3) = f(1{,}5;\ 2) = 2 * (\frac{1}{2*1.5} - 1) = -1{,}33;$$

$$\Delta y_0 = \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = \frac{0{,}5}{6}(-1{,}35 + 2*(-1{,}42) + 2*(-1{,}41) + (-1{,}33)) = -0{,}694.$$

Искомое значение функции в точке x=1,5:

$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 2{,}70 - 0{,}694 = 2{,}01.$

Значения функции во всех остальных точках находятся аналогично. Вычисления значений функции приведены в таблице:

i	x_i	y_i	K_1	K_2	K_3	K_4	Δx_i
0	1,00	2,70	-1,35	-1,42	-1,41	-1,33	-0,694
1	1,50	2,01	-1,34	-1,19	-1,22	-1,05	-0,601
2	2,00	1,40	-1,05	-0,888	-0,920	-0,756	-0,452
3	2,50	0,953	-0,762	-0,624	-0,652	-0,522	-0,320
4	3,00	0,633	-	-	-	-	-

6.4 Индивидуальное задание №6.1

Задание: Решить задачу Коши методами Эйлера, Эйлера с пересчетом, Рунге-Кутта.

Вариант №1

$$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{5}}, \quad y_0(1{,}8) = 2{,}6 \quad x \in [1{,}8; 2{,}8];$$

Вариант №2

$$y' = x + \cos\frac{y}{3}, \quad y_0(1{,}6) = 4{,}6 \quad x \in [1{,}6; 2{,}6];$$

Вариант №3

$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{10}}, \quad y_0(0,6) = 0,8 \; x \in [0,6;1,6];$

Вариант №4

$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{7}}, \quad y_0(0,5) = 0,6 \; x \in [0,5;1,5];$

Вариант №5

$y' = x + \cos\frac{y}{\pi}, \quad y_0(1,7) = 5,3 \quad x \in [1,7;2,7];$

Вариант №6

$y' = x + \cos\frac{y}{2,25}, \quad y_0(1,4) = 2,2 \quad x \in [1,4;2,4];$

Вариант №7

$y' = x + \cos\frac{y}{e}, \quad y_0(1,4) = 2,5 \quad x \in [1,4;2,4];$

Вариант №8

$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{2}}, \quad y_0(0,8) = 1,4 \quad x \in [0,8;1,8];$

Вариант №9

$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{3}}, \quad y_0(1,2) = 2,1 \quad x \in [1,2;2,2];$

Вариант №10

$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{11}}, \quad y_0(2,1) = 2,5 \quad x \in [2,1;3,1];$

Вариант №11

$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{5}}, \quad y_0(1,8) = 2,6 \quad x \in [1,8;2,8];$

Вариант №12

$y' = x + \sin\frac{y}{3}, \quad y_0(1,6) = 4,6 \quad x \in [1,6;2,6];$

Вариант №13

$$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{10}}, \quad y_0(0,6) = 0,8 \quad x \in [0,6;1,6];$$

Вариант №14

$$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{7}}, \quad y_0(0,5) = 0,6 \quad x \in [0,5;1,5];$$

Вариант №15

$$y' = x + \sin\frac{y}{\pi}, \quad y_0(1,7) = 5,3 \quad x \in [1,7;2,7];$$

Вариант №16

$$y' = x + \sin\frac{y}{2,25}, \quad y_0(1,4) = 2,2 \quad x \in [1,4;2,4];$$

Вариант №17

$$y' = x + \sin\frac{y}{e}, \quad y_0(1,4) = 2,5 \quad x \in [1,4;2,4];$$

Вариант №18

$$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2}}, \quad y_0(0,8) = 1,4 \quad x \in [0,8;1,8];$$

Вариант №19

$$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{3}}, \quad y_0(1,2) = 2,1 \quad x \in [1,2;2,2];$$

Вариант №20

$$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{11}}, \quad y_0(2,1) = 2,5 \quad x \in [2,1;3,1];$$

Вариант №21

$$y' = x + \sin\frac{y}{1,25}, \quad y_0(0,5) = 1,8 \quad x \in [0,5;1,5];$$

Вариант №22

$$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{15}}, \quad y_0(0,2) = 1,1 \quad x \in [0,2;1,2];$$

Вариант №23

$$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{1,3}}, \quad y_0(0,1) = 0,8 \quad x \in [0,1;1,1];$$

Вариант №24

$$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{0,3}}, \quad y_0(0,5) = 0,6 \quad x \in [0,5;1,5];$$

Вариант №25

$$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{0,7}}, \quad y_0(1,2) = 1,4 \quad x \in [1,2;2,2];$$

Вариант №26

$$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{1,25}}, \quad y_0(0,4) = 0,8 \quad x \in [0,4;1,4];$$

Вариант №27

$$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{1,5}}, \quad y_0(0,3) = 0,9 \quad x \in [0,3;1,3];$$

Вариант №28

$$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{1,3}}, \quad y_0(1,2) = 1,8 \quad x \in [1,2;2,2];$$

Вариант №29

$$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{0,3}}, \quad y_0(0,7) = 2,1 \quad x \in [0,7;1,7];$$

Вариант №30

$$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{0,7}}, \quad y_0(0,9) = 1,7 \quad x \in [0,9;1,9];$$

7 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

7.1 Метод конечных разностей

Дано уравнение:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{7.1}$$

где x - независимая переменная, $y = y(x)$ - искомая функция, которая при всех $x \in [a,b]$ удовлетворяет уравнению (7.1), а на концах отрезка $[a,b]$ - краевым условиям:

$$\begin{cases} \varphi_1[y(a), y'(a)] = 0 \\ \varphi_2[y(b), y'(b)] = 0 \end{cases} \tag{7.2}$$

На отрезке $[a,b]$ введем сетку: $x_0 = a, \quad x_n = b, \quad x_i = x_0 + ih, i = 1,2,..,n-1,$ и обозначим: $p_i = p(x_i); \quad q_i = q(x_i); \quad f_i = f(x_i).$

Заменим производные в дифференциальном уравнении (7.1) и краевых условиях (7.2) их разностными аналогами. Выберем центрально-разностные соотношения:

$$y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}; \quad y_i'' \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}; \tag{7.3}$$

$$y_0' \approx \frac{y_1 - y_0}{h}; \quad y_n' \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \tag{7.4}$$

Используя эти формулы, приближенно заменим уравнения (7.1) и краевые условия (7.2) системой:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i; \quad i = 1,2,...,n-1 \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = A; \quad \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = B \end{array}\right\} \tag{7.5}$$

Система (7.5) представляет собой систему n+1 линейных алгебраических уравнений с n+1 неизвестными $y_i, \quad i = 0,1,2,...,n$, которые заменяют искомую функцию $y(x)$.

Пример 1

Дано обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' + xy' - \frac{y}{x} = 1{,}5,$$

где x - независимая переменная, $y = y(x)$ - искомая функция, которая при всех $x \in [2;2{,}3]$ удовлетворяет заданному уравнению, а на концах отрезка $x \in [2;2{,}3]$ - краевым условиям:

$$\begin{aligned} y(2) - 2y'(2) &= 1 \\ y(2{,}3) + y'(2{,}3) &= 2{,}15 \end{aligned}.$$

Найти решение краевой задачи с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ конечно-разностным методом при h=0,1.

Решение:

Введем сетку $\omega_h = \{x_i = x_0 + ih,\ i = 1{,}2{,}..,\ n-1;\quad x_0 = 2,\quad x_n = 2{,}3\}$. Если взять $h = 0{,}1$, то $n = \frac{b-a}{h} = \frac{2{,}3-2}{0{,}1} = 3$.

Обозначим $y_i = y(x_i)$ и заменим производные в дифференциальном уравнении их разностными аналогами. Выберем центрально-разностные соотношения. Тогда дифференциальное уравнение примет вид:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - \frac{y_i}{x_i} = 1{,}5; \quad i = 1{,}2$$

Краевые условия можно записать в виде:

$$\begin{cases} y_0 - 2y_0' = 1 \\ y_3 + y'_3 = 2{,}15 \end{cases}$$

Заменим производные y_0', y_2' разностными соотношениями:

$$y_0' \approx \frac{y_1 - y_0}{h};\ y_3' \approx \frac{y_3 - y_2}{h}.$$

После этого краевые условия примут вид:

$$\begin{cases} y_0 - 2\frac{y_1 - y_0}{h} = 1 \\ y_3 + \frac{y_3 - y_2}{h} = 2{,}15 \end{cases}.$$

Окончательно получим следующую систему для нахождения y_0, y_1, y_2, y_3:

$$\begin{cases} y_0 - 2\dfrac{y_1 - y_0}{h} = 1; \\ \dfrac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + x_1 \dfrac{y_2 - y_0}{2h} - \dfrac{y_1}{x_1} = 1{,}5; \\ \dfrac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} + x_2 \dfrac{y_3 - y_1}{2h} - \dfrac{y_2}{x_2} = 1{,}5 \\ y_3 + \dfrac{y_3 - y_2}{h} = 2{,}15; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 - 2\dfrac{y_1 - y_0}{0{,}1} = 1; \\ \dfrac{y_2 - 2y_1 + y_0}{0{,}01} + 2{,}1\dfrac{y_2 - y_0}{0{,}2} - \dfrac{y_1}{2{,}1} = 1{,}5; \\ \dfrac{y_3 - 2y_2 + y_1}{0{,}01} + 2{,}2\dfrac{y_3 - y_1}{0{,}2} - \dfrac{y_2}{2{,}2} = 1{,}5; \\ y_3 + \dfrac{y_3 - y_2}{0{,}1} = 2{,}15; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2{,}1y_0 - 2y_1 = 0{,}1; \\ 89{,}5y_0 - 200{,}476y_1 + 110{,}5y_2 = 1{,}5; \\ 89y_1 - 200{,}455y_2 + 111y_3 = 1{,}5; \\ -y_2 + 1{,}1y_3 = 0{,}215; \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2{,}1 & -2 & 0 & 0 \\ 89{,}5 & -200{,}476 & 110{,}5 & 0 \\ 0 & 89 & -200{,}455 & 111 \\ 0 & 0 & -1 & 1{,}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0{,}215 \end{pmatrix}$$

Система линейных уравнений решается методом Гаусса.

коэффициент при x_0	коэффициент при x_1	коэффициент при x_2	коэффициент при x_4	Свободный член
2,1	-2	0	0	0,1
89,5	-200,76	110,5	0	1,5
0	89	-200,55	111	1,5
0	0	-1	1,1	0,215
1,000	-0,952	0	0	0,048
	-115,522	110,500	0	-2,762
	89,000	-200,550	111,000	1,500
	0	-1,000	1,100	0,215
	1,000	-0,957	0	0,024
		-115,419	111,000	-0,628
		-1,000	1,100	0,215
		1,000	-0,962	0,005
			0,138	0,220
			1,000	1,594

Ответ:

$x_{0=}1{,}472$ $x_{1=}1{,}496$ $x_{2=}1{,}538$ $x_{3=}1{,}594$

В случае большого числа узлов решать систему (7.5) обычными методами бывает сложно. Однако, в данном случае особенность системы (7.5) заключается в том, что ее матрица имеет трехдиагональный вид:

$$A=\begin{pmatrix} y_0 & y_1 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 & 0 \\ y_0 & y_1 & y_2 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & y_1 & y_2 & y_3 & \ldots\ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 & y_3 & \ldots\ldots\ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & y_{n-1} & y_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & y_{n-1} & y_n \end{pmatrix}$$

Такие системы удобно решать с помощью метода прогонки.

7.2 Метод прогонки

Дана система линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{aligned} & a_j y_{j-1} - c_j y_j + b_j y_{j+1} = -f_j \quad , \\ & j = 1,2,3,\ldots, n-1 \\ & y_0 = \nu_1 y_1 + \mu_1, \quad y_n = \nu_2 y_{n-1} + \mu_2. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Сначала осуществляется прямая прогонка, при которой вычисляются коэффициенты:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 = \nu_1, \quad \alpha_{j+1} = \frac{b_j}{c_j - \alpha_j a_j}, \quad j = 1,2,\ldots, n-1 \\ & \beta_1 = \mu_1, \quad \beta_{j+1} = \frac{a_j \beta_j + f_j}{c_j - \alpha_j a_j}, \quad j = 1,2,\ldots, n-1 \end{aligned} \quad . \tag{7.7}$$

После этого осуществляется обратная прогонка, при которой вычисляются искомые значения функции:

$$\begin{aligned} & y_n = \frac{\nu_2 \beta_n + \mu_2}{1 - \nu_2 \alpha_n}, \\ & y_j = \alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1}, \quad . \\ & j = n-1, n-2, \ldots, 1, 0 \end{aligned} \tag{7.8}$$

Достаточные условия сходимости метода прогонки следующие:

$$\begin{aligned} & a_j \neq 0, \quad b_j \neq 0, \quad |c_j| \geq |a_j| + |b_j|, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1; \\ & |\nu_1| \leq 1, \quad |\nu_2| < 1 \end{aligned} \quad . \tag{7.9}$$

Пример 2

Дано обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' + xy' - 0{,}5\frac{y}{x} = 1,$$

где x - независимая переменная, $y = y(x)$ - искомая функция, которая при всех $x \in [2;2{,}3]$ удовлетворяет заданному уравнению, а на концах отрезка $x \in [2;2{,}3]$ - краевым условиям:

$$\begin{cases} y(2) + 2y'(2) = 1 \\ y(2{,}3) = 2{,}15 \end{cases}.$$

Используя метод прогонки составить решение краевой задачи с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ и шагом h=0,05

Решение:

Введем сетку $\omega_h = \{x_i = x_0 + ih,\ i = 1,2,..,n-1;\quad x_0 = 2,\quad x_n = 2{,}3\}$. Если взять $h = 0{,}05$, то $n = \frac{b-a}{h} = \frac{2{,}3-2}{0{,}05} = 6$.

Обозначим $y_i = y(x_i)$ и заменим производные в дифференциальном уравнении их разностными аналогами. Выберем центрально-разностные соотношения. Тогда дифференциальное уравнение примет вид:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - 0{,}5\frac{y_i}{x_i} = 1; \quad i = 1,2,..., n-1$$

Соберем подобные слагаемые:

$$y_{i-1}(\frac{1}{h^2} - \frac{x_i}{2h}) - y_i(\frac{2}{h^2} + \frac{0{,}5}{x_i}) + y_{i+1}(\frac{1}{h^2} + \frac{x_i}{2h}) = 1.$$

Умножим обе части уравнения на h^2:

$$y_{i-1}(1 - 0{,}5hx_i) - y_i(2 + \frac{0{,}5h^2}{x_i}) + y_{i+1}(1 + 0{,}5hx_i) = h^2$$

Краевые условия можно записать в виде:

$$\begin{cases} y_0 + 2y_0' = 1 \\ y_n = 2{,}15 \end{cases}$$

Заменим производную y_0' разностным соотношением:

$$y_0{}' \approx \frac{y_1 - y_0}{h}.$$

После этого краевые условия примут вид:

$$\begin{cases} y_0 + 2\frac{y_1 - y_0}{h} = 1 \\ y_n = 2{,}15 \end{cases}.$$

Собирая подобные слагаемые в первом уравнении, получим:

$$y_0\frac{h-2}{h}+y_1\frac{2}{h}=1,\ y_0(h-2)+2y_1=h,\ y_0=\frac{2}{2-h}y_1+\frac{h}{h-2}.$$

Окончательно получим следующую систему для нахождения y_i:

$$\begin{cases} y_{i-1}(1-0{,}5hx_i)-y_i(2+\dfrac{0{,}5h^2}{x_i})+y_{i+1}(1+0{,}5hx_i)=h^2, \quad i=1,2,...,n-1 \\ y_0=\dfrac{2}{2-h}y_1+\dfrac{h}{h-2} \\ y_n=0\cdot y_{n-1}+2{,}15 \end{cases}.$$

Эта система представляет собой систему n+1 линейных алгебраических уравнений с n+1 неизвестными y_i, $i=0,1,2,...,n$, которые заменяют искомую функцию $y(x)$. Такие системы удобно решать с помощью метода прогонки.

Для нашего примера:

$$\left.\begin{array}{l} a_i=(1-0{,}5hx_i);\quad b_i=(1+0{,}5hx_i);\quad c_i=2+\dfrac{0{,}5h^2}{x_i};\quad f_i=-h^2,\quad i=1,2,...,n-1 \\ \nu_1=\dfrac{2}{2-h},\quad \mu_1=\dfrac{h}{h-2}0,\quad \nu_2=0,\quad \mu_2=2{,}15 \end{array}\right\}$$

Прямая прогонка: Вычисляем сначала коэффициенты α_i,β_i:

$$\begin{array}{l} \alpha_1=\nu_1=\dfrac{2}{2-h},\quad \alpha_{i+1}=\dfrac{b_i}{c_i-\alpha_i a_i},\quad i=1,2,....,n-1 \\ \beta_1=\mu_1=\dfrac{h}{h-2},\quad \beta_{i+1}=\dfrac{a_i\beta_i+f_i}{c_i-\alpha_i a_i},\quad i=1,2,....,n-1 \end{array}.$$

По этим формулам мы вычислили $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,.....,\alpha_n;\quad \beta_2,\beta_3,\beta_4,.....,\beta_n;$

Обратная прогонка: Сначала вычисляем $y_n=\dfrac{\nu_2\beta_n+\mu_2}{1-\nu_2\alpha_n}=2{,}15$, а затем остальные значения функции $y_{n-1},y_{n-2},y_{n-3},....,y_1,y_0$:

$$y_i=\alpha_{i+1}y_{i+1}+\beta_{i+1},\quad i=n-1,n-2,.....,1,0.$$

a= 2
b= 2,3
h= 0,01
n= (b-a)/h
n= 30
nu_1= 1,005025 nu_2= 0

mu_1= -0,00503 mu_2= 2,15
fi= -0,0001

	x_i	a_i	b_i	c_i	$alpha_i$	$beta_i$	y_i
0	2,0000	0,9900	1,0100	2,0000			2,2348
1	2,0100	0,9900	1,0101	2,0000	1,0050	-0,0050	2,2286
2	2,0200	0,9899	1,0101	2,0000	1,0049	-0,0050	2,2228
3	2,0300	0,9899	1,0102	2,0000	1,0048	-0,0051	2,2171
4	2,0400	0,9898	1,0102	2,0000	1,0047	-0,0051	2,2118
5	2,0500	0,9898	1,0103	2,0000	1,0046	-0,0051	2,2067
6	2,0600	0,9897	1,0103	2,0000	1,0045	-0,0051	2,2018
7	2,0700	0,9897	1,0104	2,0000	1,0044	-0,0051	2,1972
8	2,0800	0,9896	1,0104	2,0000	1,0043	-0,0052	2,1929
9	2,0900	0,9896	1,0105	2,0000	1,0042	-0,0052	2,1888
10	2,1000	0,9895	1,0105	2,0000	1,0041	-0,0052	2,1849
11	2,1100	0,9895	1,0106	2,0000	1,0041	-0,0052	2,1813
12	2,1200	0,9894	1,0106	2,0000	1,0040	-0,0052	2,1779
13	2,1300	0,9894	1,0107	2,0000	1,0039	-0,0052	2,1747
14	2,1400	0,9893	1,0107	2,0000	1,0038	-0,0052	2,1717
15	2,1500	0,9893	1,0108	2,0000	1,0037	-0,0052	2,1689
16	2,1600	0,9892	1,0108	2,0000	1,0036	-0,0052	2,1664
17	2,1700	0,9892	1,0109	2,0000	1,0035	-0,0053	2,1640
18	2,1800	0,9891	1,0109	2,0000	1,0034	-0,0053	2,1619
19	2,1900	0,9891	1,0110	2,0000	1,0033	-0,0053	2,1599
20	2,2000	0,9890	1,0110	2,0000	1,0033	-0,0053	2,1581
21	2,2100	0,9890	1,0111	2,0000	1,0032	-0,0053	2,1565
22	2,2200	0,9889	1,0111	2,0000	1,0031	-0,0053	2,1551
23	2,2300	0,9889	1,0112	2,0000	1,0030	-0,0053	2,1539
24	2,2400	0,9888	1,0112	2,0000	1,0029	-0,0053	2,1529
25	2,2500	0,9888	1,0113	2,0000	1,0029	-0,0053	2,1520
26	2,2600	0,9887	1,0113	2,0000	1,0028	-0,0053	2,1513
27	2,2700	0,9887	1,0114	2,0000	1,0027	-0,0052	2,1507
28	2,2800	0,9886	1,0114	2,0000	1,0026	-0,0052	2,1503
29	2,2900	0,9886	1,0115	2,0000	1,0025	-0,0052	2,1501
30	2,3000	0,9885	1,0115	2,0000	1,0025	-0,0052	2,1500

Получившийся график функции имеет вид (рисунок 3):

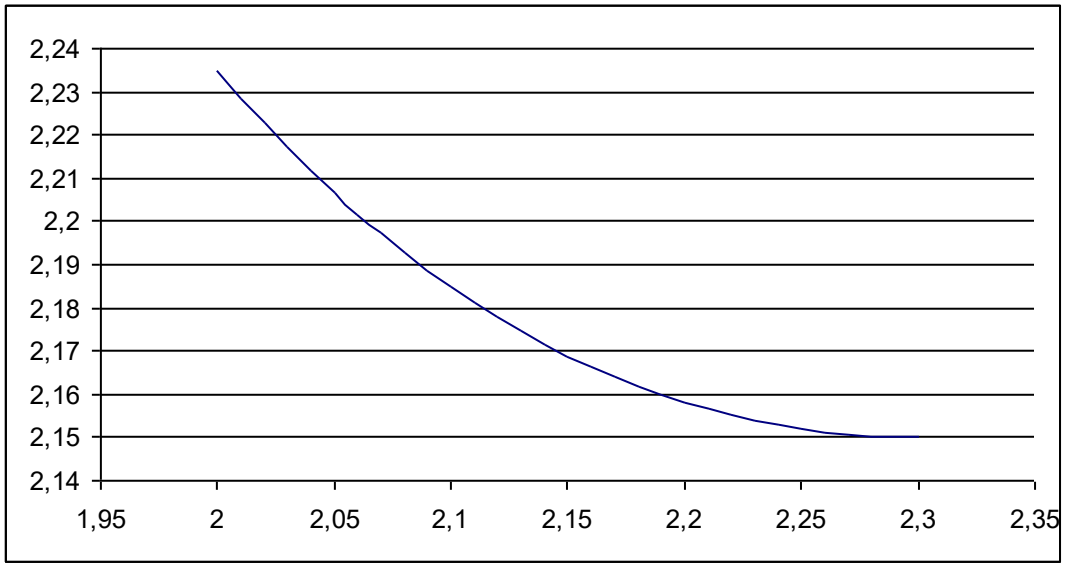


Рисунок 3 – График функции

На графике изображена функция y являющаяся решением данной краевой задачи.

7.3 Индивидуальное задание №7.1

Задание: Решите краевую задачу конечно-разностным методом при h=0,1.

Вариант №1

$$y''+\frac{y'}{2x}-2,2y=1$$

$$\begin{cases} y'(0,7)+y(0,7)=0,5 \\ 2y(1)+3y'(1)=1,2 \end{cases}$$

Вариант №2

$$y''+2xy-2y=x+1$$

$$\begin{cases} y(0,9)-1,5y'(0,9)=2 \\ \dfrac{y(1,2)}{2}-y'(1,2)=1 \end{cases}$$

Вариант №3

$$y''+y'+xy=\frac{x}{2}+4,5$$

$$\begin{cases} y(0,5)+2y'(0,5)=1 \\ y(0,8)-y'(0,8)=1,2 \end{cases}$$

Вариант №4

$$y''+2,1y'-\frac{y}{x}=4$$

$$\begin{cases} y(0,2)+y'(0,2)=8 \\ 0,5y(0,5)-y(0,5)=1 \end{cases}$$

Вариант №5

$$\frac{y''}{3}+2y'-xy=x^2$$

$$\begin{cases} y'(0,6)-y'(0,6)=0,6 \\ y(0,9)-1,5y'(0,9)=1 \end{cases}$$

Вариант №6

$$y''-\frac{y'}{2}+\frac{2y}{x}=x+0,6$$

$$\begin{cases} y(1,1)-0.5y'(1,1)=2 \\ y'(1,4)-y'(1,4)=4 \end{cases}$$

Вариант №7

$$y''-3y'-\frac{y}{2x}=1{,}3$$

$$\begin{cases} y(0{,}4)-1{,}2y'(0{,}4)=2 \\ y(0{,}7)+2y'(0{,}7)=0{,}7 \end{cases}$$

Вариант №8

$$y''+3y'-\frac{y}{x}=x1$$

$$\begin{cases} y'(1{,}2)-y(1{,}2)=1{,}3 \\ 2y(1{,}5)-y'(1{,}5)=0{,}5 \end{cases}$$

Вариант №9

$$y''-\frac{y'}{2}-3y=2x^2$$

$$\begin{cases} y(1)+2y'(1)=0{,}6 \\ y(1{,}3)-y'(1{,}3)=5 \end{cases}$$

Вариант №10

$$\frac{y''}{x}+1{,}5y'-xy=0{,}5$$

$$\begin{cases} 2y(1{,}3)-y'(1{,}3)=1 \\ y(1{,}6)+y'(1{,}6)=3 \end{cases}$$

Вариант №11

$$y''+2xy'-\frac{y}{x}=0{,}24$$

$$\begin{cases} 2y(0{,}3)+y'(0{,}3)=1 \\ y'(0{,}6)+y(0{,}6)=4 \end{cases}$$

Вариант №12

$$\frac{y''}{x}-0{,}5xy'-y=2$$

$$\begin{cases} y(0{,}4)-1{,}4y'(0{,}4)=1{,}2 \\ y(0{,}7)+2y'(0{,}7)=1{,}4 \end{cases}$$

Вариант №13

$$y''+\frac{2y'}{x}-3y=2$$

$$\begin{cases} y'(0{,}8)+y(0{,}8)=1{,}5 \\ 2y(1{,}1)+y'(1{,}1)=3 \end{cases}$$

Вариант №14

$$y''+2x^2y'-\frac{y}{x}=x$$

$$\begin{cases} 2y(0{,}5)-y'(0{,}5)=1 \\ y(0{,}8)-y'(0{,}8)=1{,}3 \end{cases}$$

Вариант №15

$$\frac{y''}{x}-3xy'-2y=1{,}5$$

$$\begin{cases} y'(0{,}7)+y(0{,}7)=3{,}3 \\ 0{,}5y(1)+y'(1)=2 \end{cases}$$

Вариант №16

$$\frac{y''}{x}+2xy'-2y=0{,}6$$

$$\begin{cases} y'(2)+y(2)=4{,}2 \\ 0{,}4y(2{,}3)-y'(2{,}3)=1 \end{cases}$$

Вариант №17

$$y''+\frac{y'}{x}-0{,}4y=2{,}4x$$

$$\begin{cases} y(0{,}6)-0{,}3y'(0{,}6)=0{,}6 \\ y'(0{,}9)-y(0{,}9)=1{,}7 \end{cases}$$

Вариант №18

$$y''+\frac{y'}{2x}-0{,}8y=x$$

$$\begin{cases} y(1{,}7)+1{,}2y'(1{,}7)=2 \\ y'(2)-y(2)=1{,}5 \end{cases}$$

Вариант №19

$$\frac{y''}{x} - \frac{y'}{3} - xy = 2$$

$$\begin{cases} y(0,8) - 0,3y'(0,8) = 1,6 \\ 3y(1,1) - 0,5y'(1,1) = 1 \end{cases}$$

Вариант №20

$$\frac{y''}{x} + 0,8y' - xy = 1,4$$

$$\begin{cases} y(1,8) - y'(1,8) = 0,8 \\ 2y(2,1) + y'(2,1) = 1,7 \end{cases}$$

Вариант №21

$$y'' + 2y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{x}$$

$$\begin{cases} 1,5y(0,9) + y'(0,9) = 1 \\ y(1,2) - y'(1,2) = 0,8 \end{cases}$$

Вариант №22

$$y'' - \frac{y'}{4} + \frac{2y}{x} = \frac{x}{2}$$

$$\begin{cases} 2,5y(1,3) - y'(1,3) = 0,6 \\ 2y'(1,6) - y(1,6) = 0,3 \end{cases}$$

Вариант №23

$$\frac{y''}{x} - 0,5y' - 0,5xy = 2x$$

$$\begin{cases} y'(1) + y(1) = 0,5 \\ 2y(1,3) - y'(1,3) = 2 \end{cases}$$

Вариант №24

$$\frac{y''}{x} + 2y' - 1,5xy = \frac{2}{x}$$

$$\begin{cases} y'(0,8) - y(0,8) = 1 \\ y(1,1) + 2y'(1,1) = 1 \end{cases}$$

Вариант №25

$$\frac{y''}{x} + 2xy' - 1,5 = x$$

$$\begin{cases} 1,4y(1,1) + 0,5y'(1,1) = 2 \\ y'(1,4) + y(1,4) = 2,6 \end{cases}$$

Вариант №26

$$y'' - \frac{xy}{2} + 0,5y = 2x$$

$$\begin{cases} 0,4y(0,2) - y'(0,2) = 1,6 \\ y'(0,5) + y(0,5) = 0,4 \end{cases}$$

Вариант №27

$$\frac{y''}{x} + 0,6xy' - 2y = 1$$

$$\begin{cases} y(1,5) - 0,2y'(1,5) = 0,6 \\ 2y(1,8) - 0,8y'(1,8) = 3 \end{cases}$$

Вариант №28

$$\frac{y''}{x} + 1,6xy' - 2y = 1$$

$$\begin{cases} y(1,5) - 1,1y'(1,5) = 0,8 \\ 2,3y(1,8) - 1,8y'(1,8) = 1,3 \end{cases}$$

Вариант №29

$$\frac{y''}{x} - 0,5x^2y' - 2y = x^2$$

$$\begin{cases} y(1,6) + 0,7y'(1,6) = 2 \\ y(1,9) - y'(1,9) = 0,9 \end{cases}$$

Вариант №30

$$\frac{y''}{x} - xy' - 2xy = 0,8$$

$$\begin{cases} y(1,2) - 0,5y'(1,2) = 1 \\ y'(1,5) - y(1,5) = 2 \end{cases}$$

7.3 Индивидуальное задание №7.2

Задание: Решите краевую задачу, применив метод прогонки при h=0,05.

Вариант №1

$$y''+\frac{y'}{x}-2y=x$$
$$\begin{cases} y(0,7)=0,5 \\ 2y(1)+3y'(1)=1,2 \end{cases}$$

Вариант №2

$$y''+xy-2y=x+1$$
$$\begin{cases} y(0,9)-0,5y'(0,9)=2 \\ y(1,2)=1 \end{cases}$$

Вариант №3

$$y''+xy'+y=x+1$$
$$\begin{cases} y(0,5)+2y'(0,5)=1 \\ y(0,8)=1,2 \end{cases}$$

Вариант №4

$$y''+2y'-\frac{y}{x}=3$$
$$\begin{cases} y(0,2)=2 \\ 0,5y(0,5)-y(0,5)=1 \end{cases}$$

Вариант №5

$$y''+2y'-xy=x^2$$
$$\begin{cases} y'(0,6)=0,7 \\ y(0,9)-0,5y'(0,9)=1 \end{cases}$$

Вариант №6

$$y''-y'+\frac{2y}{x}=x+0,4$$
$$\begin{cases} y(1,1)-0.5y'(1,1)=2 \\ y'(1,4)=4 \end{cases}$$

Вариант №7

$$y''-3y'-\frac{y}{x}=1$$
$$\begin{cases} y(0,4)=2 \\ y(0,7)+2y'(0,7)=0,7 \end{cases}$$

Вариант №8

$$y''+3y'-\frac{y}{x}=x1$$
$$\begin{cases} y'(1,2)=1 \\ 2y(1,5)-y'(1,5)=0,5 \end{cases}$$

Вариант №9

$$y''-\frac{y'}{2}-3y=2x^2$$
$$\begin{cases} y(1)+2y'(1)=0,6 \\ y(1,3)=1 \end{cases}$$

Вариант №10

$$y''+1,5y'-xy=0,5$$
$$\begin{cases} 2y(1,3)-y'(1,3)=1 \\ y(1,6)=3 \end{cases}$$

Вариант №11

$$y''+2xy'-y=0.4$$
$$\begin{cases} 2y(0,3)+y'(0,3)=1 \\ y'(0,6)=2 \end{cases}$$

Вариант №12

$$y''-0,5xy'-y=2$$
$$\begin{cases} y(0,4)=1,2 \\ y(0,7)+2y'(0,7)=1,4 \end{cases}$$

Вариант №13

$$y''+\frac{2y'}{x}-3y=2$$

$$\begin{cases} y'(0{,}8)=1{,}5 \\ 2y(1{,}1)+y'(1{,}1)=3 \end{cases}$$

Вариант №14

$$y''+2x^2y'-y=x$$

$$\begin{cases} 2y(0{,}5)-y'(0{,}5)=1 \\ y(0{,}8)=3 \end{cases}$$

Вариант №15

$$y''-3xy'-2y=1{,}5$$

$$\begin{cases} y'(0{,}7)=1{,}3 \\ 0{,}5y(1)+y'(1)=2 \end{cases}$$

Вариант №16

$$y''+2xy'-2y=0{,}6$$

$$\begin{cases} y'(2)=1 \\ 0{,}4y(2{,}3)-y'(2{,}3)=1 \end{cases}$$

Вариант №17

$$y''+\frac{y'}{x}-0{,}4y=2x$$

$$\begin{cases} y(0{,}6)-0{,}3y'(0{,}6)=0{,}6 \\ y'(0{,}9)=1{,}7 \end{cases}$$

Вариант №18

$$y''+\frac{y'}{2x}-0{,}8y=x$$

$$\begin{cases} y(1{,}7)+1{,}2y'(1{,}7)=2 \\ y'(2)=1 \end{cases}$$

Вариант №19

$$y''-\frac{y'}{3}-xy=2$$

$$\begin{cases} y(0{,}8)=1{,}6 \\ 3y(1{,}1)-0{,}5y'(1{,}1)=1 \end{cases}$$

Вариант №20

$$y''+0{,}8y'-xy=1{,}4$$

$$\begin{cases} y(1{,}8)=0{,}5 \\ 2y(2{,}1)+y'(2{,}1)=1{,}7 \end{cases}$$

Вариант №21

$$y''+2y'-\frac{y}{x}=\frac{1}{x}$$

$$\begin{cases} 0{,}5y(0{,}9)+y'(0{,}9)=1 \\ y(1{,}2)=0{,}8 \end{cases}$$

Вариант №22

$$y''-\frac{y'}{4}+\frac{2y}{x}=\frac{x}{2}$$

$$\begin{cases} 1{,}5y(1{,}3)-y'(1{,}3)=0{,}6 \\ 2y(1{,}6)=0{,}3 \end{cases}$$

Вариант №23

$$y''-0{,}5y'-0{,}5xy=2x$$

$$\begin{cases} y'(1)=0{,}5 \\ 2y(1{,}3)-y'(1{,}3)=2 \end{cases}$$

Вариант №24

$$y''+2y'-1{,}5xy=\frac{2}{x}$$

$$\begin{cases} y'(0{,}8)=1 \\ y(1{,}1)+2y'(1{,}1)=1 \end{cases}$$

Вариант №25

$$y''+2xy'-1,5=x$$

$$\begin{cases} 1,4y(1,1)+0,5y'(1,1)=2 \\ y'(1,4)=2,5 \end{cases}$$

Вариант №26

$$y''-\frac{xy}{2}+0,5y=2x$$

$$\begin{cases} 0,4y(0,2)-y'(0,2)=1,5 \\ y'(0,5)=0,4 \end{cases}$$

Вариант №27

$$y''+0,6xy'-2y=1$$

$$\begin{cases} y(1,5)=0,6 \\ 2y(1,8)-0,8y'(1,8)=3 \end{cases}$$

Вариант №28

$$y''+1,6xy'-2y=1$$

$$\begin{cases} y(1,5)=0,8 \\ 2,3y(1,8)-1,8y'(1,8)=1,3 \end{cases}$$

Вариант №29

$$y''-0,5x^2y'-2y=x^2$$

$$\begin{cases} y(1,6)+0,7y'(1,6)=2 \\ y(1,9)=0,8 \end{cases}$$

Вариант №30

$$y''-xy'-2xy=0,8$$

$$\begin{cases} y(1,2)-0,5y'(1,2)=1 \\ y'(1,5)=2 \end{cases}$$

8 РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

8.1 Дифференциальные уравнения с частными производными

Уравнение, связывающее неизвестную функцию $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, независимые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и частные производные от неизвестной функции, называется дифференциальным уравнением с частными производными.

Оно имеет вид:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}) = 0, \qquad (8.1)$$

Линейное уравнение второго порядка можно представить в виде:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = F(x, y) \qquad (8.2)$$

причем A, B, C, a, b, c - зависят лишь от x, y.

Обозначим $D = AC - B^2$. В зависимости от знака функции D уравнение (8.1) относится в некоторой заданной области к одному из следующих типов.

$D > 0$ - эллиптический тип;

$D = 0$ - параболический тип;

$D < 0$ - гиперболический тип.

Примеры уравнений с частными производными:

Волновое уравнение: $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}). \qquad (8.3)$$

Уравнение теплопроводности: $$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}). \qquad (8.4)$$

Уравнение Пуассона: $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y). \qquad (8.5)$$

При отсутствии источников тепла внутри тела уравнение Пуассона переходит в уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \qquad (8.6)$$

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона: найти непрерывную в $\overline{G} = G \cup \Gamma$ функцию $u(x_1, x_2)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x_1, x_2), \quad x = (x_1, x_2) \in G, \tag{8.7}$$

и граничному условию $u(x) = \mu(x), \quad x \in \Gamma$, где G–область, Γ – ее граница, $f(x), \mu(x)$ - заданные функции. Предполагается, что они таковы, что решение задачи (8.7) существует, единственно и является достаточно гладкой функцией.

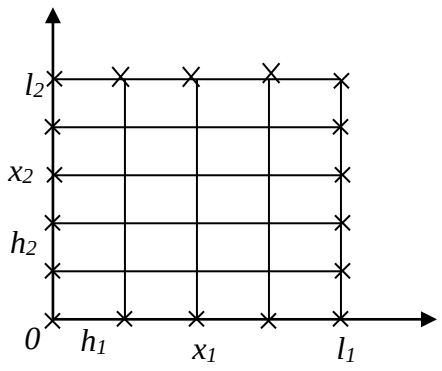
Введем в $\overline{G}$ прямоугольную сетку:

$$\Omega_h = \left\{ x_{ij} = (x_1^{(i)}, x_2^{(j)}),\ x_1^{(i)} = ih_1,\ i = 0,1,\ldots,N_1,\ h_1 N_1 = l_1;\ x_2^{(j)} = jh_2,\ j = 0,1,\ldots,N_2,\ h_2 N_2 = l_2 \right\}$$

с шагами h_1 по переменной x_1 и h_2 - по переменной x_2.

Обозначив $y_{ij} = y(x_{ij}),\ f_{ij} = f(x_{ij}), \quad x_{ij} \in \Omega_h$, сопоставим задаче (8.7) следующую разностную схему:

$$\begin{aligned}
&\frac{y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}}{h_2^2} = -f_{ij}, \\
&i = 1,2,\ldots,N_1 - 1, \quad j = 1,2,\ldots,N_2 - 1, \\
&y_{i,0} = \mu(x_1^i, 0), \quad y_{i,N_2} = \mu(x_1^i, l_2), \quad i = 1,2,\ldots,N_1 - 1, \\
&y_{0,j} = \mu(0, x_2^j), \quad y_{N_1,j} = \mu(l_1, x_2^j), \quad j = 1,2,\ldots,N_2 - 1,
\end{aligned} \tag{8.8}$$



Построенная разностная схема имеет второй порядок погрешности аппроксимации по h_1 и по h_2 и представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно y_{ij}, состоящую из $(N_1 - 1) \times (N_2 - 1)$ уравнений и стольких же неизвестных. Она является устойчивой по правой части и граничным условиям.

Пример 1

Используя метод сеток, составить решение дифференциального уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ с заданными граничными условиями, шаг h=1.

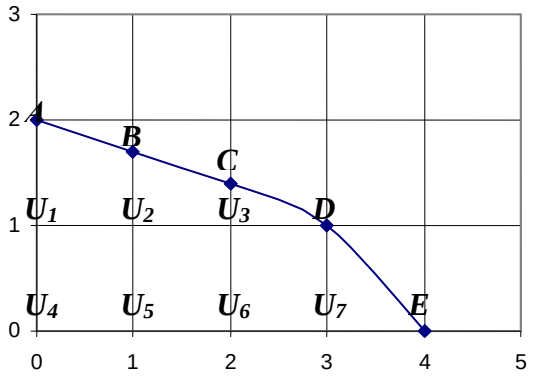
Решение:

$$\left.\begin{array}{l}|x|=4-y^2\\ x\in[-4,4]\end{array}\right\}(\Gamma),\ u(x,y)\big|_{\Gamma}=|x|+\frac{y^2}{2}$$

Область Г является симметричной относительно оси *OY*, поэтому рассматривается только первая четверть.

Решение строится при значении шага h=1, таблица значений x и y представлена ниже:

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y	2	1,9	1,7	1,6	1,4	1,2	1	0,7	0



Вычислим значение функции $u(x,y)$ на границе :

Точка	A	B	C	D	E
x	0	1	2	3	4
y	2	1,7	1,4	1	0
u(x,y)	2	2,45	2,98	3,5	4

Для определения значений функции $u(x,y)$ во внутренних точках составим систему уравнений, содержащих эти значения. Каждое уравнение получается из следующей разностной схемы:

$$\frac{y_{i+1,j}-2y_{i,j}+y_{i-1,j}}{h_1^2}+\frac{y_{i,j+1}-2y_{i,j}+y_{i,j-1}}{h_2^2}=0,$$

$$y_{i+1,j}-2y_{i,j}+y_{i-1,j}+y_{i,j+1}-2y_{i,j}+y_{i,j-1}=0,$$

$$y_{i,j}=\frac{1}{4}(y_{i+1,j}+y_{i-1,j}+y_{i,j-1}+y_{i,j+1}).$$

Получается следующая система линейных уравнений:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{4}(2 + 2 \cdot u_2 + u_4) \\ u_2 = \frac{1}{4}(2{,}45 + u_1 + u_3 + u_5) \\ u_3 = \frac{1}{4}(2{,}98 + 3{,}5 + u_2 + u_6) \\ u_4 = \frac{1}{4}(4 \cdot u_2) \\ u_5 = \frac{1}{4}(u_4 + u_6 + 2 \cdot u_2) \\ u_6 = \frac{1}{4}(2 \cdot u_3 + u_5 + u_7) \\ u_7 = \frac{1}{4}(u_6 + 2 \cdot 3{,}5 + 4) \end{cases}$$

Система решается методом итераций. Решение системы:

u1	2,55
u2	2,73
u3	3,09
u4	2,73
u5	2,83
u6	3,13
u7	3,53

Таким образом, для каждого узла сетки найдено значение функции.

8.2 Индивидуальное задание №8

Задание: Используя метод сеток, составить решение дифференциального уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ с заданными граничными условиями; шаг h=1.

Вариант №1 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ (Г), $u(x,y)|_Г=|x|+|y|$,

Вариант №2 (|x|+2)(|y|+2)=12 (Г), $u(x,y)|Г=2|x|+|y|$,

Вариант №3 $\left.\begin{array}{l}|y|=4-x^2\\ x\in[-2,2]\end{array}\right\}$(Г), $u(x,y)|Г=|x||y|$,

Вариант №4 $x^2+y^2=16$ (Г), $u(x,y)|Г=|x|+2|y|$,

Вариант №5 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ (Г), $u(x,y)|Г=|x||y|$,

Вариант №6 $\left.\begin{array}{l}|x|=4-y^2\\ x\in[-4,4]\end{array}\right\}$(Г), $u(x,y)|Г=|x|+|y|$,

Вариант №7 (|x|+2)(|y|+2)=12 (Г), $u(x,y)|Г=|x||y|$,

Вариант №8 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ (Г), $u(x,y)|Г=2|x|+|y|$,

Вариант №9 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ (Г), $u(x,y)|Г=|x||y|$,

Вариант №10 $\left.\begin{array}{l}|y|=4-x^2\\ x\in[-2,2]\end{array}\right\}$(Г), $u(x,y)|Г=|x|+|y|$,

Вариант №11 $x^2+y^2=16$ (Г), $u(x,y)|Г=0{,}5|x|+|y|$,

Вариант №12 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ (Г), $u(x,y)|Г=|x|+0{,}5|y|$,

Вариант №13 $\left.\begin{array}{l} |x| = 4 - y^2 \\ x \in [-4,4] \end{array}\right\}$ (Г), $u(x, y)|_{\Gamma} = |x| + \frac{y^2}{2}$,

Вариант №14 (|x|+2)(|y|+2)=12 (Г), u(x,y)|Г=2|x|+0,5|y|,

Вариант №15 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ (Г), u(x,y)|Г=|x|+|y|,

Вариант №16 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ (Г), u(x,y)|Г=2|x|+0,5|y|,

Вариант №17 $\left.\begin{array}{l} |y| = 9 - x^2 \\ x \in [-3,3] \end{array}\right\}$ (Г), u(x,y)|Г=|x|+0,5|y|,

Вариант №18 $x^2 + y^2 = 16$ (Г), u(x,y)|Г=0,5|x|+2|y|,

Вариант №19 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ (Г), u(x,y)|Г=0,5|x|+|y|,

Вариант №20 $\left.\begin{array}{l} |x| = 9 - y^2 \\ x \in [-9,9] \end{array}\right\}$ (Г), u(x,y)|Г=0,5|x|+|y|,

Вариант №21 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ (Г), u(x,y)|Г=0,5|x|+2|y|,

Вариант №22 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ (Г), u(x,y)|Г=0,5|x||y|,

Вариант №23 (|x|+3)(|y|+2)=18 (Г), u(x,y)|Г=|x|+0,5|y|,

Вариант №24 $\left.\begin{array}{l} |y| = 9 - x^2 \\ x \in [-3,3] \end{array}\right\}$ (Г), u(x,y)|Г=2|x|+0,5|y|,

Вариант №25 $x^2 + y^2 = 16$ (Г), u(x,y)|Г=0,5(|x|+|y|),

Вариант №26 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ (Г), u(x,y)|Г=0,5|x|-|y|,

Вариант №27 $\left.\begin{array}{l} |x| = 4 - y^2 \\ x \in [-4, 4] \end{array}\right\}$ (Г), u(x,y)|Г=|x|+0,5|y|,

Вариант №28 (|x|+2)(|y|+3)=18 (Г), u(x,y)|Г=2|x|+0,5|y|,

Вариант №29 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ (Г), u(x,y)|Г=|x|+0,5|y|,

Вариант №30 (|x|+5)(|y|+5)=45 (Г), u(x,y)|Г=|x|+0,5|y|.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1 Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов.- М.- Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.- 432 с.

2 Марчук Г.И. Методы вычислительной математики: Учеб. пособие.- 3-е изд., перераб. и доп.- М.- Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.- 608 с.

3 Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах: Учеб. пособие для втузов.- М.- Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972.- 368 с.

4 Какенова О.С., Калижанова А.У., Айткулова Ж.С., Кашаганова Г.Б. Вычислительные методы с прменением ЭВМ: Методические указания. –А. – издательский центр КазНТУ, 2002. -90 с.

5 Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. –М.- Высшая школа. 1990. -205 с.

Дополнительная литература

1 Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики: Учеб. пособие для втузов.- 3-е изд., испр.- М.- Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966.- 664 с.

2 Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов.- М.- Мир, 1976.- 392с.

3 Турчак Л.И. Основы численных методов.- М.: Наука, 1987

4 Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры.- 2-е изд., испр..- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.- 320 с.

5 Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.-:Наука,1978.-512с.